UC-NRLF
$B 529 013

Sammlung Schubert LI

Liniengeometrie

mit Anwendungen

Von

Prof. Dr. Konrad Zindler

Zweiter Teil

G. J. Göschensche Verlagshandlung, Leipzig

GENERAL

Sammlung Schubert

Sammlung mathematischer Lehrbücher.

LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF CALIFORNIA.

Class

„ VIII: **Analytische Geometrie der Ebene** von Prof. Dr. Max Simon in Straßburg. M. 6.—.

„ IX: **Analyt. Geometrie d. Raumes I. Teil: Gerade, Ebene, Kugel** von Prof. Dr. Max Simon in Straßburg. M. 4.—.

„ X: **Differential- und Integralrechnung I. Teil: Differentialrechnung** von Prof. Dr. W. Franz Meyer in Königsberg. M. 9.—.

„ XI: **Differential- und Integralrechnung II. Teil: Integralrechnung** von Prof. Dr. W. Franz Meyer in Königsberg. M. 10.—.

„ XII: **Darstellende Geometrie I. Teil: Elemente der darstellenden Geometrie** von Dr. John Schröder in Hamburg. M. 5.—.

„ XIII: **Differentialgleichungen** von Prof. Dr. L. Schlesinger in Klausenburg. 2. Aufl. M. 8.—.

„ XIV: **Praxis der Gleichungen** von Prof. Dr. C. Runge in Hannover. M. 5.20.

„ XIX: **Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichungsrechnung** von Dr. Norbert Herz in Wien. M. 8.—.

„ XX: **Versicherungsmathematik** von Dr. W. Großmann in Wien. M. 5.—.

„ XXV: **Analytische Geometrie des Raumes II. Teil: Die Flächen zweiten Grades** von Prof. Dr. Max Simon in Straßburg. M. 4.40.

„ XXVII: **Geometr. Transformationen I. Teil: Die projektiven Transformationen nebst ihren Anwendungen** von Prof. Dr. Karl Doehlemann in München. M. 10.—.

Band XXIX: **Allgemeine Theorie der Raumkurven u. Flächen I. Teil** von Prof. Dr. Victor Kommerell in Reutlingen u. Prof. Dr. Karl Kommerell in Heilbronn. M. 4.80.

„ XXXI: **Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale** von Oberlehrer E. Landfriedt in Straßburg. Mk. 8.50.

„ XXXII: **Theorie und Praxis der Reihen** von Professor Dr. C. Runge in Hannover. M. 7.—.

„ XXXIV: **Liniengeometrie mit Anwendungen I. Teil** von Prof. Dr. Konrad Zindler in Innsbruck. M. 12.—.

„ XXXV: **Mehrdimensionale Geometrie I. Teil: Die linearen Räume** von Prof. Dr. P. H. Schoute in Groningen. M. 10.—.

„ XXXVI: **Mehrdimensionale Geometrie II. Teil: Die Polytope** von Prof. Dr. P. H. Schoute in Groningen. M. 10.—.

„ XXXVIII: **Angewandte Potentialtheorie in elementarer Behandlung** I. Teil von Prof. E. Grimsehl in Hamburg. M. 6.—.

„ XXXIX: **Thermodynamik I. Teil** von Prof. Dr. W. Voigt in Göttingen. M. 10.—.

„ XL: **Mathematische Optik** von Prof. Dr. J. Classen in Hamburg. M. 6.—.

„ XLI: **Theorie der Elektrizität und des Magnetismus I. Teil: Elektrostatik und Elektrokinetik** von Prof. Dr. J. Classen in Hamburg. M. 5.—.

„ XLII: **Theorie der Elektrizität und des Magnetismus II. Tl.: Magnetismus u. Elektromagnetismus** von Prof. Dr. J. Classen in Hamburg. M. 7.—.

„ XLIII: **Theorie der ebenen algebraischen Kurven höherer Ordnung** von Dr. Heinr. Wieleitner in Speyer. M. 10.—.

„ XLIV: **Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen II. Teil** von Prof. Dr. Victor Kommerell in Reutlingen und Professor Dr. Karl Kommerell in Heilbronn. M. 5.80.

„ XLV: **Niedere Analysis II. Teil: Funktionen, Potenzreihen, Gleichungen** von Prof. Dr. Hermann Schubert in Hamburg. M. 3.80.

„ XLVI: **Thetafunktionen u. hyperelliptische Funktionen** von Oberlehrer E. Landfriedt in Straßburg. M. 4.50.

„ XLVIII: **Thermodynamik II. Teil** von Prof. Dr. W. Voigt in Göttingen. M. 10.—.

„ XLIX: **Nichteuklidische Geometrie** von Prof. Dr. Heinr. Liebmann in Leipzig. M. 6.50.

„ L: **Gewöhnliche Differentialgleichungen beliebiger Ordnung** von Dr. J. Horn, Professor an der Bergakademie zu Clausthal. M. 10.—.

„ LI: **Liniengeometrie mit Anwendungen II. Teil** von Prof. Dr. Konrad Zindler in Innsbruck. M. 8.—.

In Vorbereitung bzw. projektiert sind:

Elemente der Astronomie von Dr. Ernst Hartwig in Bamberg.
Mathematische Geographie von Dr. Ernst Hartwig in Bamberg.
Darstellende Geometrie von Prof. Dr. Th. Schmid in Wien.
Geschichte der Mathematik von Prof. Dr. A. v. Braunmühl und Prof. Dr. S. Günther in München.
Dynamik von Prof. Dr. Karl Heun in Karlsruhe.
Technische Mechanik von Prof. Dr. Karl Heun in Karlsruhe.
Geodäsie von Prof. Dr. A. Galle in Potsdam.
Allgemeine Funktionentheorie von Dr. Paul Epstein in Straßburg.
Räumliche projektive Geometrie.
Geometrische Transformationen II. Teil von Prof. Dr. Karl Doehlemann in München.
Elliptische Funktionen von Dr. Karl Boehm in Heidelberg.
Allgemeine Formen- und Invariantentheorie von Prof. Dr. W. Franz Meyer in Königsberg.
Angewandte Potentialtheorie in elementarer Behandlung II. Teil von Prof. E. Grimsehl im Hamburg.
Liniengeometrie III. Teil von Prof. Dr. Konrad Zindler in Innsbruck.
Kinematik von Prof. Dr. Karl Heun in Karlsruhe.
Elektromagnetische Lichttheorie von Prof. Dr. J. Classen in Hamburg.
Gruppen- u. Substitutionentheorie v. Prof. Dr. E. Netto in Gießen.
Theorie der Flächen dritter Ordnung.
Mathematische Potentialtheorie v. Prof. Dr. A. Wangerin in Halle.
Elastizitäts- und Festigkeitslehre im Bauwesen von Dr. ing. H. Reißner in Berlin.
Elastizitäts- und Festigkeitslehre im Maschinenbau von Dr. Rudolf Wagner in Stettin.
Graphisches Rechnen von Prof. Aug. Adler in Wien.
Partielle Differentialgleichungen von Prof. J. Horn in Clausthal.
Theorie der geometrischen Konstruktionen von Prof. Aug. Adler in Wien.
Vektorenanalyse.
Spezielle algebraische und transcendente ebene Kurven von Dr. Heinrich Wieleitner in Speyer.
Grundlehren der geographischen Ortsbestimmung von Dr. K. Graff in Hamburg.
Grundlagen der theoretischen Chemie von Dr. Franz Wenzel in Wien.

Sammlung Schubert LI

Liniengeometrie

mit Anwendungen

von

Dr. Konrad Zindler
Professor an der Universität Innsbruck

II. Band

Mit 24 Figuren

LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

Leipzig
G. J. Göschen'sche Verlagshandlung
1906

QA608
Z5
v.2

GENERAL

Alle Rechte
von der Verlagshandlung vorbehalten.

Spamersche Buchdruckerei, Leipzig-R.

Vorwort.

Um die Fortsetzung des Werkes nicht zu sehr zu verzögern, wurde der geplante zweite Band in einen zweiten und dritten geteilt, von denen der vorliegende zweite vorwiegend differentialgeometrische Untersuchungen enthält, während der dritte die Theorie der quadratischen Komplexe, der algebraischen Strahlenkongruenzen und die Anwendungen auf Mechanik umfassen soll. Für die Teilung war auch maßgebend, daß ich am 27. September 1905 im Auftrage der Deutschen Mathematikervereinigung in der Sektion I der Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte in Meran einen Bericht über die Differentialgeometrie der Strahlenkongruenzen erstattet habe; er bildete einen Teil des Berichtes über differentielle Liniengeometrie in den Jahresberichten der Deutschen Mathematikervereinigung (Bd. 15). In diesem Berichte habe ich nun an einigen Stellen den zweiten Band meiner Liniengeometrie zitiert und hegte daher den Wunsch, daß den Fachgenossen, die den Bericht lesen, das zitierte Werk auch zugänglich sein soll. Ich bin deshalb der Verlagshandlung sehr dankbar, daß sie auf den Vorschlag der Teilung bereitwillig eingegangen ist.

Auch die Gegenstände dieses Bandes suchte ich der Anschauung möglichst zugänglich zu machen; diesem Zwecke dienen z. B. die drei Richtungszeiger für die Umgebung eines Strahles (§ 19). Was die Methode der Untersuchung betrifft, so habe ich eine Parameterdarstellung, die bisher in der metrischen Liniengeometrie kaum Verwendung gefunden hat, ausgiebig benutzt, indem ich nämlich die Linienzeiger als Funktionen eines oder zweier oder dreier unabhängiger Parameter voraussetze. Auf diesem Wege konnten u. a. alle

157566

wesentlichen differentialgeometrischen Sätze Kummers über Strahlenkongruenzen bewiesen, aber auch einige neue Ergebnisse gefunden werden. Als solche möchte ich z. B. anführen (vgl. übrigens den erwähnten Bericht): Eine ausgezeichnete Erzeugungsart der Regelflächen (Satz 19), die Berechnung der extremen Werte des Verteilungsparameters für einen allgemein liegenden Kongruenzstrahl (§ 22), die Grenzflächen der Strahlennetze (§ 26), die Differentialgleichungen der Hauptflächen und der Krümmungsflächen einer Kongruenz (§ 28), die isotropen Umdrehungs- und Schraubungskongruenzen (§ 29), die Einführung und Berechnung der Umgebungsgröße eines Komplexstrahles (§ 42), die Verwendung eines Kegelschnittbüschels zur Untersuchung der Umgebung eines Komplexstrahles und der zugehörigen ausgezeichneten Richtungen (§ 47, 48), die Beziehung zwischen den Richtungszeigern in der Umgebung eines Doppelstrahles (§ 57). Auch scheinen die vier Abbildungen einer Regelfläche (§ 7) und die sechzehn Arten von Erzeugenden (§ 13) noch nicht bemerkt worden zu sein.

Innsbruck, am 3. Oktober 1905.

Konrad Zindler.

Inhaltsverzeichnis.

I. Abschnitt: **Regelflächen.** Seite

§ 1. Grundbegriffe und Normalenparaboloid 1
§ 2. Analytische Darstellungen 4
§ 3. Der Abstand zweier Nachbarstrahlen 7
§ 4. Abwickelbare Flächen 10
§ 5. Die Striktionslinie und die Zentraltangentenfläche 14
§ 6. Besondere windschiefe Flächen 19
§ 7. Die natürlichen Gleichungen einer Regelfläche und ihre Abbildungen 20
§ 8. Die Bestimmung einer Regelfläche aus ihren natürlichen Gleichungen 24
§ 9. Anwendungen auf besondere Regelflächen . . . 28
§ 10. Die mit einer Regelfläche verbundenen Flächen 30
§ 11. Eine ausgezeichnete Erzeugungsweise der Regelflächen 32
§ 12. Die allgemeine Regelschraubenfläche 37
§ 13. Die singulären Erzeugenden 41
§ 14. Schmiegungsregelschar und berührende Komplexe 47
§ 15. Algebraische Regelflächen 51
§ 16. Die abwickelbaren Flächen vierter Ordnung . . 57
§ 17. Die Regelflächen dritter Ordnung 59
Übungsaufgaben 65

II. Abschnitt: **Differentialgeometrie der Strahlenkongruenzen.**

§ 18. Natürliche Linienzeiger 67
§ 19. Die Fortschreitungsrichtungen im Linienraum 70
§ 20. Die Umgebung eines Kongruenzstrahles 74
§ 21. Die Umgebung der Hauptstrahlen der Netze . 81
§ 22. Die extremen Werte des Verteilungsparameters 83

Seite

§ 23. Die berührenden Strahlennetze und das berührende Schraubenbüschel 87
§ 24. Die Umgebung beliebiger Strahlen eines Netzes 91
§ 25. Die Mittelfläche, die Mitteleinhüllende und die Grenzfläche einer Kongruenz 96
§ 26. Die Grenzflächen der Strahlennetze 99
§ 27. Die Brennfläche und die abwickelbaren Flächen einer Kongruenz 102
§ 28. Die Hauptflächen und die Krümmungsflächen einer Kongruenz 108
§ 29. Umdrehungskongruenzen und Schraubungskongruenzen, besonders isotrope 113
§ 30. Normalenkongruenzen 116
§ 31. Das Dichtigkeitsmaß und die Striktionsfläche . 120
§ 32. Geschichtliche Bemerkungen über die Differentialgeometrie der Kongruenzen. 128
§ 33. Der Satz von Malus und Dupin. 131
§ 34. Zylindrische und singuläre Strahlen 132
Übungsaufgaben 137

III. Abschnitt: **Allgemeine Theorie der Komplexe.**

§ 35. Die Arten von Komplexstrahlen 139
§ 36. Unbestimmtheiten der Darstellung 142
§ 37. Die Normalform von Clebsch 145
§ 38. Die Hauptkorrelation eines regulären Komplexstrahles 147
§ 39. Die singulären Strahlen, Punkte und Ebenen . 149
§ 40. Die Singularitätenfläche und die akzessorische Fläche 151
§ 41. Die Umgebung eines regulären Komplexstrahles 154
§ 42. Die berührenden linearen Komplexe 161
§ 43. Komplexflächen 165
§ 44. Komplexkurven 167
§ 45. Singuläre Komplexe 170
§ 46. Orthogonale Richtungen und ihre Abbildung . 174
§ 47. Die Fortschreitungsrichtungen in einem Komplex 179
§ 48. Ausgezeichnete Richtungen im Komplex . . . 186
§ 49. Ausgezeichnete Zerlegungen eines Komplexes . 195
§ 50. Orthogonale Trajektorien und Parameter . . . 197
§ 51. Die Mongesche Gleichung eines Komplexes . 199
§ 52. Andere Differentialgleichungen 205
§ 53. Das Strahlengewinde 208

Seite

§ 54. Oskulation der berührenden linearen Komplexe; Wenderichtungen 215
§ 55. Die Hauptrichtungen, Hauptflächen und Hauptkomplexe 221
§ 56. Polarkomplexe 224
§ 57. Die Doppelstrahlen 228
Übungsaufgaben 232
Anhang I: Anleitung zur Lösung der Übungsaufgaben . . 234
Anhang II: Zusammenstellung der wichtigsten Formeln zur Differentialgeometrie der Strahlenkongruenzen 246
Berichtigungen zum I. und II. Bande 249
Sachverzeichnis zum II. Bande 250

LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

I. Abschnitt.

Regelflächen.

§ 1. Grundbegriffe und Normalenparaboloid.

Wir denken uns eine Regelfläche $\mathfrak{R}$ durch Bewegung einer Geraden g erzeugt und betrachten zwei Nachbarlagen a und b von g (Fig. 1), deren kürzester Abstand AB sei.

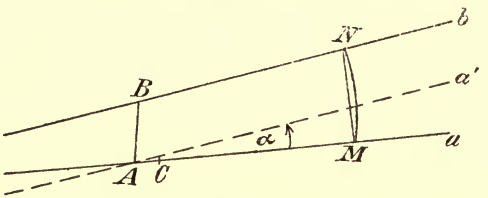

Fig. 1.

Dann können wir a nach b überführen, indem wir zuerst um die Achse AB drehen, bis $a' \parallel b$ wird und dann eine Translation längs AB ausführen. Lassen wir beide Bewegungen gleichzeitig und gleichförmig vor sich gehen, so entsteht eine gleichförmige Schraubung mit der Steigung $\mathfrak{f}_1 = \vartheta_1 : \omega_1$, wenn hierbei ϑ_1 die Translations-, ω_1 die Drehungsgeschwindigkeit ist. Hält man a fest und nähert b auf der Regelfläche unbegrenzt, so wird sich A einer Grenzlage C nähern, die der Zentralpunkt von a heißt; die Grenzlage von AB heißt Zentraltangente (oder Striktionsstrahl) und die Flächennormale in C die Zentralnormale. Wenn man die Unbestimmtheit der erwähnten Schraubung, die noch mit beliebiger Geschwindigkeit vor

sich gehen kann, dadurch beseitigt, daß man etwa für einen Punkt der Erzeugenden die absolute Geschwindigkeit willkürlich fixiert*), so werden auch ϑ_1 und ω_1 im allgemeinen bestimmte Grenzwerte ϑ und ω annehmen, die wir zunächst beide als von Null verschieden voraussetzen; durch sie ist eine Grenzschraubung mit der Steigung

$$\mathfrak{k} = \frac{\vartheta}{\omega} \tag{1}$$

und für irgend einen Punkt M auf a eine Grenzschraubenlinie als Bahn definiert. Wenn $BN = AM$ ist (Fig. 1), wird die Sehne MN beim Grenzübergang zur Tangente der Grenzschraubenlinie in M, zugleich aber auch zur Tangente von $\mathfrak{R}$. Die Tangenten von $\mathfrak{R}$ in den Punkten von a, die zugleich auf a senkrecht stehen, sind also auch die Tangenten einer gewissen Schraubenfläche. Sie bilden nun ein gleichseitiges hyperbolisches Paraboloid; um seine Gleichung aufzustellen, verlegen wir die X-Achse in die Erzeugende a, die Y-Achse in die Zentralnormale, wodurch die Z-Achse in die Zentraltangente fällt und so gerichtet sein soll, daß ϑ positiv wird; die beiden anderen Achsen sollen so gerichtet sein, daß ein System erster Art entsteht. Die Beziehung zwischen der Neigung ν der Bahntangenten und der Entfernung x von der Achse Z der Grenzschraubung entnehmen wir aus Bd. I, § 1:

$$\tan\nu = \frac{\mathfrak{k}}{x}$$

und, wenn wir $\tan\nu = z : y$ setzen, erhalten wir als Gleichung des Paraboloides:

$$z\,x = \mathfrak{k}\,y\,. \tag{2}$$

Drehen wir jeden seiner Strahlen um a um 90^0, so erhalten wir das Normalenparaboloid:

$$\mathfrak{k}\,z = -x\,y\,. \tag{3}$$

Satz 1 (von Chasles): Die Normalen einer Regelfläche längs einer Erzeugenden a bilden ein gleich-

*) Da es nur aufs Verhältnis von ϑ_1 und ω_1 ankommt, so ist es am einfachsten, $\vartheta_1 = \text{const.} = \vartheta$ oder $\omega_1 = \text{const.} = \omega$ anzunehmen. Die allgemeinere Fassung des Textes umfaßt bequemer die Fälle, wo entweder ϑ oder ω verschwindet.

seitiges hyperbolisches Paraboloid, dessen Haupterzeugende a und die Zentralnormale sind.

Dieser Satz folgt auch aus Bd. I, § 59, γ), sobald man die Bewegung der Erzeugenden als Schraubung aufgefaßt hat. Er erleidet nur eine Ausnahme, wenn entweder ϑ oder ω verschwindet; im ersten Falle haben wir an Stelle der Grenzschraubung eine Grenzdrehung, im zweiten eine Grenztranslation, in beiden Fällen also statt des Normalenparaboloides ein Parallelstrahlenbüschel und folglich eine gemeinsame Berührungsebene für alle Punkte von a.

Wir kehren zum allgemeinen Falle zurück: Die Differentiale des Abstandes AB und des Winkels α zweier Nachbarstrahlen sind $\vartheta \cdot dt$ und $\omega \cdot dt$, wenn t die Zeit bedeutet; also ist $\mathfrak{k}$ auch der Grenzwert des Verhältnisses

$$\frac{AB}{\alpha}$$

und heißt als solcher Verteilungsparameter.

Man kann zu diesen Sätzen noch auf andere Art gelangen: Verbindet man jeden Punkt der Reihe N mit dem entsprechenden M durch eine Gerade, so erhält man das Erzeugnis zweier kongruenter Punktreihen, in denen die Fußpunkte des kürzesten Abstandes einander entsprechen, also ein gleichseitiges hyperbolisches Paraboloid. Projiziert man ferner die Reihe N aus a, so ist das so hervorgehende Ebenenbüschel zur Reihe N projektiv und die Ebene Na wird in der Grenze die Berührungsebene der Regelfläche in M. Also:

Satz 2: Die Punkte einer Erzeugenden einer Regelfläche und die Berührungsebenen in diesen Punkten bilden eine Korrelation.

Der Parameter K derselben ist nach Bd. I, § 58, Gl. (104):

$$K = -\frac{1}{\mathfrak{k}}. \tag{4}$$

Gegen a sind die Nachbarstrahlen links- oder rechtsgewunden, je nachdem $\mathfrak{k}$ positiv oder negativ ist. Wir nennen hiernach die Regelfläche selbst an der Stelle a links- oder rechtsgewunden. Die Berührungsebene im Zentralpunkt (zugleich Verbindungsebene von a mit der Zentraltangente) heißt die Zentralebene, die darauf senkrechte Ebene durch a die asymptotische Ebene; sie ist die Berührungsebene von $\mathfrak{R}$ im unendlich fernen Punkte von a und zugleich die

Grenzlage der durch a zur Nachbarlage gelegten Parallelebene. Die Normalebene von a im Zentralpunkt heiße Hauptebene.

§ 2. Analytische Darstellungen.

Wenn die rechtwinkligen Strahlenzeiger p_i eines Stabes als differentiierbare Funktionen einer unabhängigen Veränderlichen t gegeben sind

$$p_i = p_i(t) \qquad (i = 1, \ldots, 6), \tag{5}$$

welche die Beziehung

$$R(p) = 2\sum_1^3 p_i p_{i+3} = 0 \tag{6}$$

identisch erfüllen, so ist durch (5) eine Regelfläche als Stabfläche definiert. Die ersten drei Zeiger allein bestimmen die Richtung des Stabes, also

$$p_i + p_i' dt + \ldots \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{5a}$$

die Richtung des Nachbarstabes. Wenn daher U, V, W die Zeiger der asymptotischen Ebene sind, so ist

$$U:V:W = \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ p_1' & p_2' & p_3' \end{vmatrix} *). \tag{7}$$

Zur Bestimmung von U, V, W selbst ziehen wir noch eine der drei letzteren Inzidenzbedingungen (39) (Bd. I, § 38) heran, spezialisieren für rechtwinklige Zeiger (Bd. I, § 31) und finden, wenn wir

$$\frac{1}{\sum_1^3 p_i' p_{i+3}} = \tau \tag{8}$$

setzen:

$$U = (p_2' p_3 - p_3' p_2)\,\tau\,. \tag{9}$$

*) So drückt man es mitunter aus, wenn man sagen will, daß eine Reihe von Größen den Determinanten einer Matrix proportional sind, deren Zeilenzahl und Spaltenzahl sich um eins unterscheiden. Die Striche bedeuten Ableitungen nach t. Die Zeiger kommen überall nur modulo sechs in Betracht. Wo wir von drei Punkt- oder Ebenenzeigern nur einen hinschreiben, ist es selbstverständlich, daß die anderen durch zyklische Vertauschung innerhalb der Indizesreihen 1, 2, 3 und 4, 5, 6 gefunden werden; bei (11) unterliegen rechts auch U, V, W der Vertauschung.

Die Zentralebene u, v, w steht auf der asymptotischen senkrecht, also

$$Uu + Vv + Ww = 0 . \tag{10}$$

Aus dieser Gleichung und zwei passenden der erwähnten Inzidenzbedingungen findet man:

$$u = \frac{Vp_3 - Wp_2}{Up_4 + Vp_5 + Wp_6} \tag{11}$$

oder indem man aus (9) die Werte einsetzt:

$$u = \frac{1}{D}\left(p_1' \sum_1^3 p_i^2 - p_1 \sum_1^3 p_i p_i'\right), \tag{12}$$

wobei

$$D = \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ p_1' & p_2' & p_3' \\ p_4 & p_5 & p_6 \end{vmatrix} . \tag{13}$$

Den Zentralpunkt x, y, z berechnen wir als Grenzlage des Schnittes der Zentralebene mit der Nachbarerzeugenden und schicken anschließend an Bd. I, § 38 eine Bemerkung voraus: Die linken Seiten der dortigen Inzidenzbedingungen (39) haben auch eine Bedeutung, wenn p und u nicht inzident sind; dann sind sie nämlich den Zeigern des Schnittpunktes (p, u) proportional. Man überzeugt sich davon, indem man zur Berechnung dieser Zeiger zu zweien der Gleichungen (40) noch

$$\sum_1^4 u_\lambda x_\lambda = 0$$

hinzunimmt. Dual: Wenn die linken Seiten von (40) nicht sämtlich verschwinden, sind sie die Zeiger der Verbindungsebene (p, x). Für rechtwinklige Zeiger sind also nach Bd. I, § 31 die Zeiger des Schnittpunktes und der Verbindungsebene, wenn

$$p_1 u + p_2 v + p_3 w = n , \quad p_4 x + p_5 y + p_6 z = n' \tag{14}$$

gesetzt wird, gegeben durch

$$\begin{cases} n x = -p_1 \qquad\quad + p_6 v - p_5 w \\ n y = -p_2 - p_6 u \qquad\quad + p_4 w \\ n z = -p_3 + p_5 u - p_4 v \end{cases} \tag{15}$$

beziehungsweise

$$(16)\qquad \begin{cases} n'u = -p_4 \qquad\quad + p_3 y - p_2 z \\ n'v = -p_5 - p_3 x \qquad + p_1 z \\ n'w = -p_6 + p_2 x - p_1 y \end{cases}$$

In (15) haben wir für u, v, w die Werte (12) und für die außerdem noch vorkommenden $p_1, \ldots p_6$ die Werte (5a) einzusetzen, was aber darauf hinauskommt, $p'_1, \ldots p'_6$ zu setzen. So erhalten wir für den Zentralpunkt

$$(17)\qquad x = \frac{-p'_1 D + \left(\sum_1^3 p_i^2\right)\begin{vmatrix} p'_2 & p'_3 \\ p'_5 & p'_6 \end{vmatrix} - \left(\sum_1^3 p_i p'_i\right)\begin{vmatrix} p_2 & p_3 \\ p'_5 & p'_6 \end{vmatrix}}{\sum_1^3 p_i^2 \sum_1^3 p_i'^2 - \left(\sum_1^3 p_i p'_i\right)^2}.$$

Diese Formeln vereinfachen sich bedeutend, wenn wir die Regelfläche durch einen Einheitsstab erzeugt denken, nämlich

$$(18)\qquad \sum_1^3 p_i^2 = 1\,, \quad \text{also} \quad \sum_1^3 p_i p'_i = 0$$

voraussetzen. Dann wird für die Zentralebene

$$(12a)\qquad u = \frac{p'_1}{D}\,,$$

für den Zentralpunkt

$$(17a)\qquad x = \frac{1}{\sum_1^3 p_i'^2}(-p'_1 D + p'_2 p'_6 - p'_3 p'_5)$$

und für die Hauptebene, wie man aus ihrer bekannten Stellung und der Inzidenzbeziehung mit dem Zentralpunkt findet:

$$(19)\qquad \mathfrak{U} = \frac{-p_1 \sum_1^3 p_i'^2}{\Delta}\,,$$

wobei

$$(19a)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ p'_1 & p'_2 & p'_3 \\ p'_4 & p'_5 & p'_6 \end{vmatrix}.$$

§ 3. Der Abstand zweier Nachbarstrahlen.

Wir berechnen (Bd. I, § 37) aus

$$M(p, q) = \sum_1^6 p_{\nu+3} q_\nu \tag{20}$$

das Moment zweier Nachbarstäbe (t) und $(t+h)$ der Fläche (5), indem wir

$$q_\nu = p_\nu + h p'_\nu + \frac{h^2}{2} p''_\nu + \dots$$

einführen*):

$$M(p, q) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{h^\lambda}{\lambda!} \sum_1^6 p_{\nu+3} p_\nu^{(\lambda)} . \tag{21}$$

Setzen wir

$$\sum_1^6 p_{\nu+3}^{(\mu)} p_\nu^{(\lambda)} = (\mu, \lambda) = (\lambda, \mu)$$

und bezeichnen Differentiationen durch Striche, so ist

$$(\mu, \lambda)' = (\mu, \lambda + 1) + (\mu + 1, \lambda) .$$

Wir wollen zeigen, daß sich die Koeffizienten $(0, \lambda)$ der Reihe (21) durch die Größen

$$(1, 1), \quad (2, 2), \quad \dots \quad (\mu, \mu), \quad \dots$$

allein (und ihre Ableitungen) ausdrücken lassen. Wir finden zunächst, indem wir die Beziehung $(0, 0) = 0$ zwischen den Linienzeigern differenzieren:

$$\begin{cases} (0, 1) = 0 , \\ (0, 2) = -(1, 1) , \end{cases} \tag{21a}$$

ferner aus der Identität $(1, 1) = (1, 1)$:

$$(1, 2) = \tfrac{1}{2}(1, 1)',$$

weiter

$$(0, 3) = -\tfrac{3}{2}(1, 1)'.$$

*) Wenn die Entwicklung der Funktionen p_i in Taylorsche Reihen nicht unbeschränkt ist, sondern mit einem Restgliede an bestimmter Stelle abgebrochen werden muß, so unterliegen die Formeln für $M(p, q)$ und d einer entsprechenden Abänderung.

Allgemein findet man

$$\begin{aligned}
&(0, 2\lambda) \quad + (1, 2\lambda - 1) = (0, 2\lambda - 1)' \\
&(1, 2\lambda - 1) + (2, 2\lambda - 2) = (1, 2\lambda - 2)' \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&(\lambda - 1, \lambda + 1) + (\lambda, \lambda) = (\lambda - 1, \lambda)',
\end{aligned}$$

woraus

$$(0, 2\lambda) = \sum_{\mu=1}^{\lambda} (-1)^{\mu-1} (\mu - 1, 2\lambda - \mu)' + (-1)^{\lambda} (\lambda, \lambda).$$

Aber auch jedes andere Symbol mit der Argumentensumme 2λ können wir auf diese Art berechnen, wenn wir die Summation statt mit der ersten Gleichung mit einer späteren beginnen. Analog dienen die Formeln

$$\begin{aligned}
&(0, 2\lambda + 1) + (1, 2\lambda) \quad = (0, 2\lambda)' \\
&(1, 2\lambda) \quad + (2, 2\lambda - 1) = (1, 2\lambda - 1)' \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&(\lambda, \lambda + 1) = \tfrac{1}{2}(\lambda, \lambda)'
\end{aligned}$$

zur Berechnung der Symbole

$$(\mu, 2\lambda + 1 - \mu) \qquad (\mu = 0, 1, \ldots \lambda).$$

Wenn es also bis $k = \lambda - 1$ gilt, daß alle Symbole, deren Argumentensumme $2k + 1$ nicht übersteigt, durch

$$(1, 1), \quad (2, 2), \quad \ldots \quad (k, k)$$

ausdrückbar sind, so gilt dies auch für $k = \lambda$. Da es für $k = 1$ schon feststeht, ist hiermit bewiesen, daß bei der angegebenen Reduktion das Symbol (λ, λ) genau beim Gliede mit $\frac{h^{2\lambda}}{(2\lambda)!}$ zum ersten Male auftritt, und zwar mit dem Koeffizienten $(-1)^{\lambda}$, woraus wir den Satz 5 folgern werden. Wenn wir zur früheren Schreibweise (6)

$$(\lambda, \lambda) = R(p^{(\lambda)})$$

zurückkehren, lautet der Beginn der Entwicklung (vgl. Koenigs, Géom. réglée, Art. 51):

$$(22) \qquad \left\{ \begin{aligned} M(p, q) &= -\frac{h^2}{2} R(p') - \frac{h^3}{4} \frac{dR(p')}{dt} \\ &+ \frac{h^4}{24} \left[R(p'') - 2 \frac{d^2 R(p')}{dt^2} \right] + \cdots \end{aligned} \right.$$

Wenn wir durch den Ursprung als Mittelpunkt einer Einheitskugel zu jedem Strahl der Fläche (5) eine Parallele legen, so erhalten wir die konische Abbildung und als Schnitt mit der Kugel die sphärische Abbildung der Regelfläche. Wir machen jetzt die Voraussetzung (18); dann sind p_1, p_2, p_3 zugleich die Zeiger des sphärischen Bildes eines Strahles von $\mathfrak{R}$. Deshalb ist die in § 1 eingeführte Geschwindigkeit ω gegeben durch

$$\omega^2 = \sum_1^3 p_\lambda'^2 . \tag{23}$$

Wir wollen den kürzesten Abstand d zweier Nachbarstäbe von (5) nach Bd. I, § 37 berechnen. Es gilt für beliebige Größen die Identität

$$(p_2 p_3' - p_3 p_2')^2 + (p_3 p_1' - p_1 p_3')^2 + (p_1 p_2' - p_2 p_1')^2 = \sum_1^3 p_\lambda^2 \sum_1^3 p_\lambda'^2 - \left(\sum_1^3 p_\lambda p_\lambda'\right)^2 . \tag{24}$$

Also wird die Größe w des § 37:

$$w^2 = h^2 \omega^2 + \ldots$$

Es empfiehlt sich, hier ω und w stets positiv zu zählen; dann haben d und M entgegengesetzte Vorzeichen (Bd. I, § 12). Daher:

$$d = \frac{h R(p')}{2\omega} + \frac{h^2}{4\omega}\frac{dR(p')}{dt} - \frac{h^3}{24\omega}\left[R(p'') - 2\frac{d^2 R(p')}{dt^2}\right] + \ldots \tag{25}$$

Nun war (§ 1) der Verteilungsparameter

$$\mathfrak{k} = \lim \frac{d}{\omega h} ,$$

also

$$\mathfrak{k} = \frac{R(p')}{2\omega^2} = \frac{\sum_1^3 p_\lambda' p_{\lambda+3}'}{\sum_1^3 p_\lambda'^2} . \tag{26}$$

Da das Krümmungsmaß $\mathfrak{K}$ der Regelfläche im Zentralpunkt einer Erzeugenden*) durch

$$\mathfrak{K} = -\frac{1}{\mathfrak{k}^2} \tag{27}$$

gegeben ist, so ist hiermit auch das Krümmungsmaß im Zentralpunkt durch die Linienzeiger dargestellt.

---

§ 4. Abwickelbare Flächen.

Wir setzen aus der Flächentheorie als bekannt voraus, daß die Kegelflächen (Zylinderflächen) und die Tangentenflächen der Raumkurven die einzigen Flächen sind, die in eine Ebene abwickelbar sind (Scheffers, Theorie der Kurven, S. 278 f.). Alle übrigen Regelflächen heißen windschief. Wir wollen nun (wie es ja durch Gleichung (25) nahegelegt wird) zeigen:

Satz 3: Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Abwickelbarkeit der Regelfläche (5) ist in Plückerschen Zeigern:

$$R(p') = \sum_1^6 p'_\nu p'_{\nu+3} = 0 \qquad \text{(für alle Werte } t\text{)}, \tag{28}$$

in Kleinschen Zeigern:

$$\sum_1^6 x_i'^2 = 0\,. \tag{28a}$$

Jedenfalls wird, wenn die Bedingung (28) erfüllt ist, ein Stab p' definiert, der p wegen (21a) in einem Punkte P schneidet. Wenn P fest ist, haben wir eine Kegelfläche vor uns; andernfalls ist der geometrische Ort von P eine Kurve C, die auf der Regelfläche $\mathfrak{R}$ liegt. Um zu zeigen, daß $\mathfrak{R}$ die Tangentenfläche von C ist, genügt es, nach-

*) Vgl. Scheffers, Theorie d. Flächen, II. Abschn. § 13. Durch Vergleich der dortigen Formel (17) mit unserer Korrelationsgleichung

$$\operatorname{tg}\alpha = Kt$$

(Bd. I, § 53, b) geht hervor, daß $\mathfrak{K} = -K^2$ ist; da anderseits nach (4) $K\mathfrak{k} = -1$ ist, folgt (27).

zuweisen, daß die ersten drei Zeiger von p, welche die Richtung bestimmen, auch den Richtungskosinus der Tangente von C proportional sind. P hat nach Bd. I, § 39, b und § 31 die rechtwinkligen Zeiger

$$x = \frac{p_6 p_5' - p_5 p_6'}{\sum_1^3 p_i p_{i+3}'}, \tag{29}$$

usw. Man kann jedoch voraussetzen:

$$\sum_1^3 p_i p_{i+3}' = 1 . \tag{30}$$

Denn wäre

$$\sum_1^3 p_i p_{i+3}' = f(t) ,$$

so setze man

$$\int \frac{dt}{f(t)} = \psi(t)$$

statt t in (5) ein*). Dadurch wird dieselbe Regelfläche durch andere Funktionen q_i statt p_i definiert:

$$q_i = f_i[\psi(t)] = q_i(t)$$

$$q_i' = \frac{\partial f_i}{\partial \psi} \cdot \psi'(t) = p_i' \cdot \frac{1}{f}$$

$$\sum_1^3 q_i q_{i+3}' = \frac{1}{f} \sum_1^3 p_i p_{i+3}' = 1 .$$

*) Nur wenn fortwährend

$$p_1 p_4' + p_2 p_5' + p_3 p_6' = 0 \tag{α}$$

wäre, würde diese Transformation versagen. Dann aber folgt aus (21 a):

$$p_1' p_4 + p_2' p_5 + p_3' p_6 = 0 . \tag{β}$$

Es kann entweder $p_1' = p_2' = p_3' = 0$ sein (Zylinderflächen), oder man verbinde (α) mit (28) und (β) mit (6), woraus folgt:

$$p_4' : p_5' : p_6' = p_4 : p_5 : p_6 .$$

Deutet man also p_4 , p_5 , p_6 als Zeiger eines Vektors, so hat dieser konstante Richtung. Nach seiner geometrischen Bedeutung (Bd. I, Satz 46) ist nun die Verbindungsebene der Geraden p mit dem Ursprung fest. Beide Fälle können wir ausschließen.

Auch die Funktion $R(p')$ multipliziert sich dadurch nur mit einem Faktor, so daß das Kennzeichen des Satzes 3 nicht gestört wird. Jetzt sind x', y', z' die Determinanten aus der Matrix

$$\begin{matrix} p_4'' & p_5'' & p_6'' \\ p_4 & p_5 & p_6 \end{matrix} .$$

Andrerseits folgt aus (30) mit Rücksicht auf (28)

$$p_1 p_4'' + p_2 p_5'' + p_3 p_6'' = 0 .$$

Hieraus und aus

$$p_1 p_4 + p_2 p_5 + p_3 p_6 = 0$$

folgt die erwähnte Proportionalität.

Ist umgekehrt durch

$$x(t) , \quad y(t) , \quad z(t)$$

eine Raumkurve gegeben, so ist

$$x + x' , \quad y + y' , \quad z + z'$$

ein zweiter Punkt ihrer Tangente. Als Zeiger der Tangente kann man also nehmen (Bd. I, § 33):

$$x' , \quad y' , \quad z' , \quad y z' - y' z , \quad z x' - z' x , \quad x y' - x' y .$$

Daher wird

$$R(p') = \begin{vmatrix} x'' & y'' & z'' \\ x & y & z \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0 .$$

Endlich folgt für eine Kegelfläche unmittelbar aus (25), daß $R(p') = 0$ ist. Somit ist Satz 3 zunächst für rechtwinklige Zeiger bewiesen. Das Kennzeichen dieses Satzes bleibt auch bei tetraedrischen Zeigern unverändert. Denn die Eigenschaft der Abwickelbarkeit bleibt bei projektiver Transformation erhalten. Andrerseits entspricht einer linearen Transformation der Linienzeiger p selbst auch eine solche ihrer Ableitungen p'; die Invarianz der Funktion R gegenüber einer projektiven Transformation ist uns aber schon bekannt, weil sie die speziellen linearen Komplexe kennzeichnet.

Wenn die Regelfläche in Kleinschen Zeigern $x_i(t)$ gegeben ist, so bestehen zwischen den Ableitungen x' derselben und den p' dieselben linearen Gleichungen, wie zwischen den x und den p selbst. Durch diese Transformation geht also gleichzeitig $R(p)$ in Σx^2 und $R(p')$ in $\Sigma x'^2$ über, woraus der zweite Teil des Satzes 3 folgt.

Wenn die unabhängige Veränderliche t irgend eine lineare Größe, z. B. die Bogenlänge der sphärischen Abbildung bedeutet*) ($\omega = 1$), so folgt aus (25):

Satz 4: Für eine windschiefe Regelfläche verschwindet der Abstand zweier Nachbarstrahlen im allgemeinen von der ersten, für eine abwickelbare von der dritten Ordnung.

Es kann sein, daß für besondere Strahlen, sei es einer windschiefen, sei es einer abwickelbaren Fläche, eine Reihe der Größen $R(p'), R(p''), R(p'''), \ldots$ verschwinden. Unter allen Umständen folgt jedoch aus dem Bau der Gleichung (25), solange überhaupt die Entwicklung in eine Taylorsche Reihe möglich ist:

Satz 5: Der Abstand zweier Nachbarstrahlen einer Regelfläche wird immer (auch für besondere Strahlen) von einer ungeraden Ordnung unendlich klein.

Für eine Kegelfläche oder die Gesamtheit der Tangenten einer ebenen Kurve (eine „Klassenkurve") muß d in (25) identisch Null werden. Es muß also vor allem

$$R(p') = 0\,, \quad R(p'') = 0 \tag{31}$$

sein. Koenigs hat gezeigt (a. a. O. Art. 52), daß dies auch hinreicht, damit einer der beiden Fälle eintritt. Die Entscheidung zwischen ihnen kann bei rechtwinkligen Zeigern so geschehen: Im Fall der Klassenkurve muß es eine Richtung q geben, die auf irgend einem Strahl p und seinen Nachbarstrahlen senkrecht steht. Also:

$$\sum_{\lambda=1}^{3} q_\lambda p_\lambda^{(\mu)} = 0\,. \qquad (\mu = 0\,,\ 1\,,\ 2)$$

*) Ein solcher Zusatz ist nötig, damit die Aussagen über die Ordnungen des Verschwindens eine bestimmte Bedeutung bekommen.

Daher prüfe man, ob die Determinante

$$(32) \qquad \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ p_1' & p_2' & p_3' \\ p_1'' & p_2'' & p_3'' \end{vmatrix} = \mathfrak{D}$$

identisch verschwindet.

---

§ 5. Die Striktionslinie und die Zentraltangentenfläche.

Der geometrische Ort der Zentralpunkte der Erzeugenden einer Regelfläche heißt Striktionslinie s (Fig. 2); wir haben in (17) und (17a) eine Parameterdarstellung derselben.

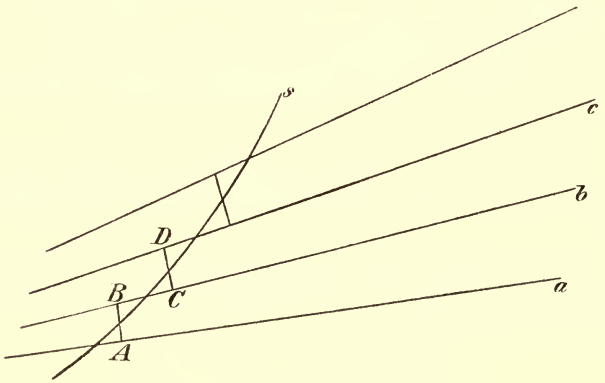

Fig. 2.

Der geometrische Ort der Zentraltangenten heiße Zentraltangentenfläche oder (nach Study) Striktionsband. Wenn a, b, c Nachbarerzeugende sind und AB der kürzeste Abstand zwischen a und b, CD zwischen b und c, so ist auch BC der kürzeste Abstand zwischen AB und CD. Dies gilt, wie dicht man auch die Erzeugenden wählen mag. Geht man also zur Grenze über, so erhält man:

Satz 6: Sucht man vom Striktionsband einer Regelfläche $\mathfrak{R}$ wieder das Striktionsband, so kommt man zu $\mathfrak{R}$ zurück*). Beide Flächen haben dieselbe

*) Study, Geom. der Dynamen, S. 303.

Striktionslinie und gemeinsame Zentralebenen; die asymptotischen Ebenen der einen sind die Hauptebenen der anderen.

Zur analytischen Darstellung des Striktionsbandes suchen wir nach Bd. I, § 37 die Grenzlage des Abstandsstabes zweier Nachbarerzeugenden $p_i(t)$ und $p_i(t+h)$. Man beachte, daß dort in den Gleichungen (37b) die eckige Klammer bis zu den Gliedern mit h^3 zu entwickeln ist, aber die Determinanten P und Q (unter der Voraussetzung (18)) bis zu h^2. Setzt man

$$P = P_1 h + P_2 h^2 + \dots, \quad Q = Q_1 h + Q_2 h^2 + \dots,$$

so ist

$$(33) \qquad Q_1 = P_1 = D \quad (\S\ 2), \qquad Q_2 - P_2 = \Delta \quad (\S\ 2).$$

Die Zeiger irgend eines Stabes auf der Zentraltangente sind proportional den Größen:

$$(34) \qquad \begin{cases} d_1 = \omega^2(p_2' p_3 - p_3' p_2) & d_4 = p_1 \omega^2 D + p_1' \Delta \\ d_2 = \omega^2(p_3' p_1 - p_1' p_3) & d_5 = p_2 \omega^2 D + p_2' \Delta \\ d_3 = \omega^2(p_1' p_2 - p_2' p_1) & d_6 = p_3 \omega^2 D + p_3' \Delta\,. \end{cases}$$

Die Anfangsglieder in den Entwicklungen der Zeiger des tatsächlichen Abstandsstabes werden erhalten, indem man diese Ausdrücke mit dem niedrigsten Gliede von $\dfrac{M}{h\,\omega^4}$ multipliziert, also nach (22) für windschiefe Flächen im allgemeinen mit

$$-\frac{h}{\omega^4} \sum_1^3 p_i' p_{i+3}',$$

für abwickelbare mit

$$\frac{h^3}{12\,\omega^4} \sum_1^3 p_i'' p_{i+3}''.$$

Wenn wir neben der Voraussetzung (18) annehmen, daß die Bogenlänge der sphärischen Abbildung die unabhängige Veränderliche sei (wodurch wir nur die Zylinderflächen ausschließen), so ist

$$(35) \qquad \omega = 1$$

daher wegen (23) und (24) auch

$$\sum_1^3 d_\lambda'^2 = 1$$

und die Formeln (23) und (26) auch auf die Zentraltangentenfläche $\mathfrak{T}$ anwendbar. Kennzeichnen wir die auf die letztere bezüglichen Größen durch den Index eins, so ist also:

$$\omega_1^2 = \sum_1^3 d_\lambda'^2 = \sum_1^3 p_\lambda''^2 - 1 \tag{36}$$

$$\mathfrak{k}_1 = \frac{\sum_1^3 d_\lambda' d_{\lambda+3}'}{\omega_1^2} = \frac{\mathfrak{D}(D + \Delta')}{\sum_1^3 p_\lambda''^2 - 1} \qquad \text{(vgl. (32) und § 2)} \tag{37}$$

$$\vartheta_1 = \mathfrak{k}_1 \omega_1 = \frac{\mathfrak{D}(D + \Delta')}{\sqrt{\sum_1^3 p_\lambda''^2 - 1}} \tag{38}$$

und zwar ist, falls ω_1 positiv*) gewählt wurde, der Wurzel dasjenige Zeichen zu geben, welches bewirkt, daß ϑ_1 und $\mathfrak{k}_1$ gleiche Zeichen haben. Für die ursprüngliche Fläche $\mathfrak{R}$ vereinfachen sich die entsprechenden Größen nach § 3 zu

$$\mathfrak{k} = \vartheta = \sum_1^3 p_\lambda' p_{\lambda+3}' = \tfrac{1}{2} R(p') . \tag{39}$$

Die Gleichung (35) bringt noch folgende Vereinfachung einiger früheren Formeln (§ 2) mit sich: Für den Zentralpunkt (die Striktionslinie):

$$x = - p_1' D + \begin{vmatrix} p_2' & p_3' \\ p_5' & p_6' \end{vmatrix} . \tag{17b}$$

Für die Hauptebene:

$$\mathfrak{U} = - \frac{p_1}{\Delta} . \tag{19b}$$

Eine Gerade kann man in eine bestimmte Nachbarlage auf unendlich viele Arten überführen, weil man aus irgend einer Art eine andere erhält, wenn man eine Verschiebung

*) Dies ist nach der folgenden Vorzeichenbetrachtung gestattet.

der Geraden in sich selbst hinzufügt. Indem man diese Schiebungsgeschwindigkeit von der Zeit willkürlich abhängen läßt, sieht man, daß man dieselbe Regelfläche auf unendlich viele Arten, die von einer willkürlichen Funktion abhängen, durch Bewegung einer Geraden erzeugen kann. Es kommt dies darauf hinaus, für einen Punkt der beweglichen Geraden eine Kurve auf der Fläche als Bahn willkürlich vorzuschreiben. Unter diesen Erzeugungsarten befindet sich die hier in § 1 ausgezeichnete, bei der (schon nach Bd. I, Satz 4) sämtliche Punkte senkrechte Trajektorien aller Erzeugenden beschreiben. Hierbei verschiebt sich der Zentralpunkt längs der Erzeugenden mit einer gewissen Geschwindigkeit σ. Ferner nennen wir η die Geschwindigkeit, mit der sich die Zentraltangente oder (was auf dasselbe hinauskommt) die asymptotische Ebene um die zugehörige Erzeugende von $\mathfrak{R}$ dreht. Dieselbe Betrachtung, die zu Satz 6 führte, läßt erkennen*):

$$(40) \qquad \begin{cases} \eta = \omega_1 & \sigma = \vartheta_1 \\ \eta_1 = \omega & \sigma_1 = \vartheta . \end{cases}$$

Nur die Vorzeichenfrage ist noch zu besprechen:

Wenn die Bewegung der Geraden irgendwie geometrisch gegeben ist, so sind bestimmte Vorzeichen der vier Geschwindigkeiten erst definiert, wenn wir die Bewegung auf ein Zeigersystem beziehen, und zwar wollen wir die X-Achse in die betrachtete Erzeugende verlegen, die Z-Achse in jene Richtung der Zentraltangente, von der aus der tatsächliche Drehungssinn der Erzeugenden positiv erscheint (also $\omega > 0$), worauf die Richtung der Y-Achse bestimmt ist, weil wir stets Zeigersysteme erster Art verwenden; nun haben ϑ, σ, η ihre bestimmten Vorzeichen (letzteres als Drehung um die X-Achse). Die einzige Änderung, die man mit dem Zeigersystem S noch vornehmen kann, ohne das Erreichte zu stören, ist, daß man die positiven Richtungen der X- und Y-Achse

*) Will man für die ursprüngliche Fläche $\omega = 1$, für das Striktionsband jedoch entsprechend $\omega_1 = 1$ setzen und bezeichnet jetzt die auf das Striktionsband bezüglichen Größen mit dem Index 2, so findet man aus (40) (bis auf die Bezeichnung) die Formeln Antomaris (Thèse, Art. 18):

$$(40\,a) \qquad \eta_2 = \frac{\eta_1}{\omega_1} = \frac{1}{\eta}, \qquad \sigma_2 = \frac{\sigma_1}{\omega_1} = \frac{\vartheta}{\eta}, \qquad \vartheta_2 = \frac{\vartheta_1}{\omega_1} = \frac{\sigma}{\eta} .$$

gleichzeitig in ihr Gegenteil verkehrt, wodurch das System S' entstehen möge; dadurch ändern die Geschwindigkeiten σ und η und nur diese ihr Zeichen. Man kann also immer erreichen, daß neben ω auch entweder σ oder η nicht negativ ist*). Wir bevorzugen jetzt die erstere Annahme, was mit sich bringt, daß die Striktionslinie mit der Erzeugenden einen Winkel ζ im ersten oder vierten Quadranten bildet (also $\cos\zeta > 0$). Dann ist, wenn $\mathfrak{R}$ die ursprüngliche Fläche, $\mathfrak{T}$ ihr Striktionsband ist, wegen der geometrischen Bedeutung von

$$\mathfrak{k} = \frac{\vartheta}{\omega} \quad \text{und} \quad \mathfrak{k}_1 = \frac{\sigma}{\eta} \tag{41}$$

ϑ positiv oder negativ, je nachdem $\mathfrak{R}$ an der betreffenden Stelle links- oder rechtsgewunden ist, und η positiv oder negativ, je nachdem $\mathfrak{T}$ links- oder rechtsgewunden ist. Man kann sich unmittelbar anschaulich machen, daß alle vier Kombinationen wirklich eintreten können: Denn man kann sich zunächst je eine links- und eine rechtsgewundene Fläche mit Richtebene (Definition im nächsten Paragraphen) verschaffen; ihre Zentraltangenten sind parallel. Nun kann man in jedem der beiden Fälle einen Streifen der Fläche gegen den Nachbarstreifen um die gemeinsame Erzeugende im einen oder im anderen Sinne drehen, wodurch die benachbarten Zentraltangenten einmal links-, einmal rechtsgewunden werden. Wenn nun die Größen $\omega_1, \vartheta_1, \sigma_1, \eta_1$ auf dasselbe Zeigersystem bezogen werden (und nicht etwa auf eins, das gegen $\mathfrak{T}$ ebenso liegt wie S gegen $\mathfrak{R}$), so ist es selbstverständlich, daß die Gleichungen (40) auch dem Zeichen nach gelten.

Wenn aber die Bewegung nicht geometrisch, sondern eben durch die Funktionen $\omega, \vartheta, \sigma, \eta$ und gewisse Anfangsbedingungen gegeben ist (wie im § 7), so kann man ebenfalls, da es nur auf ihre Verhältnisse ankommt, $\omega > 0$ voraussetzen. Dann kann man ohne die geometrische Bedeutung der gegebenen Funktionen zu ändern, den beiden Funktionen σ und η ein Minuszeichen vorschreiben, wenn

*) Dies bezieht sich natürlich nur auf eine gewisse Umgebung der betrachteten Erzeugenden; im weiteren Verlauf der Bewegung, bei der das Zeigersystem stetig mitgeführt wird, können die Geschwindigkeiten unabhängig voneinander ihre Zeichen ändern.

man gleichzeitig S und S' vertauscht. Man kann also wieder erreichen, daß entweder ω und σ oder ω und η positiv sind.

Man sieht aus (36)—(40), daß wir für $\omega = 1$ die drei anderen Geschwindigkeiten, die für $\mathfrak{R}$ charakteristisch sind, als Funktionen der Linienzeiger und ihrer Ableitungen dargestellt haben. Der Winkel ζ der Striktionslinie mit der Erzeugenden ist gegeben durch

$$\cos\zeta = \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + \vartheta^2}}, \qquad \sin\zeta = \frac{\vartheta}{\sqrt{\sigma^2 + \vartheta^2}}, \tag{42}$$

wobei, da $\cos\zeta > 0$ und σ positiv ist, der Wurzel das positive Zeichen zu geben ist.

---

§ 6. Besondere windschiefe Flächen.

a) Wenn alle Erzeugenden einer Regelfläche $\mathfrak{R}'$ einer festen Ebene E parallel sind, so sagt man, $\mathfrak{R}'$ habe E als Richtebene. Wenn man eine beliebige Regelfläche $\mathfrak{R}$ durch eine Anzahl ihrer Erzeugenden $a, b, c, d, \ldots$ in Streifen teilt, so kann man den Streifen bc (und mit ihm alle folgenden) um b drehen, bis c einer Ebene E parallel wird, die auch zu a und b parallel ist; dann halte man die Streifen ab, bc fest und drehe die folgenden um c, bis auch $d \parallel E$ wird usw. Da man die teilenden Erzeugenden beliebig dicht nehmen kann, sieht man (Maxwell, Transact. of the Cambr. Phil. Soc. IX, 1851):

Satz 7: Jede Regelfläche kann durch Biegung in eine solche mit Richtebene verwandelt werden.

Wenn wir zwei Erzeugende von $\mathfrak{R}'$ auf E projizieren, so projiziert sich ihr kürzester Abstand in den Schnittpunkt der Projektionen, also die Striktionslinie in die von den Projektionen der Erzeugenden eingehüllte Kurve. Daraus folgt*):

Satz 8: Die Striktionslinie einer Regelfläche mit Richtebene E ist der wahre Umriß der Fläche bezüglich einer Sehrichtung, die zu E senkrecht ist.

*) Die Definition des wahren Umrisses in Bd. I, § 25 kann auf krumme Flächen übertragen werden.

Hieraus ergibt sich z. B.:

Satz 9: Die Striktionslinie der Regelschar eines schiefen hyperbolischen Paraboloids $\mathfrak{P}$ ist eine Parabel*).

Denn der Kegel, welcher $\mathfrak{P}$ aus einem unendlich fernen Punkte umschrieben werden kann, enthält stets auch die unendlich ferne Ebene als Berührungsebene, ist also ein parabolischer Zylinder; er berührt $\mathfrak{P}$ längs eines ebenen Kegelschnittes, also einer Parabel. Nur für das gleichseitige Paraboloid ist die Striktionslinie die Haupterzeugende der anderen Schar.

b) Die Regelflächen, deren Striktionslinie $\mathfrak{S}$ eine senkrechte Trajektorie der Erzeugenden ist, sollen orthoid heißen. Die Fläche der Zentraltangenten fällt hier mit der Tangentenfläche von $\mathfrak{S}$ zusammen. Zwei Nachbartangenten derselben bestimmen eine Stellung, welche auf einer Erzeugenden der ursprünglichen Fläche normal steht, zugleich aber auch in die Schmiegungsebene von $\mathfrak{S}$ übergeht. Für die geodätischen Linien einer Fläche ist es nun charakteristisch, daß ihre Schmiegungsebenen auf der Fläche senkrecht stehen; also:

Satz 10: Für eine orthoide Fläche ist die Striktionslinie eine geodätische Linie; die Erzeugenden der Fläche sind die Binormalen ihrer Striktionslinie.

§ 7. Die natürlichen Gleichungen einer Regelfläche und ihre Abbildungen.

Durch die vier Geschwindigkeiten $\omega, \vartheta, \sigma, \eta$, die wir in § 1 und § 5 eingeführt haben**), ist eine Regelfläche $\mathfrak{R}$, abgesehen von ihrer Lage im Raume, vollständig bestimmt. Denn die beiden ersten bestimmen in jedem Augenblick die Komponenten der Schraubung einer Erzeugenden um ihre zugehörige Zentraltangente, die beiden letzten, wie sich

*) Die Striktionslinie des Hyperboloids ist von Chasles, Migotti (Wiener Sitzungsber. 1879) und Schmid (ebenda 1881) untersucht worden; sie ist eine rationale Raumkurve vierter Ordnung.

**) Die beiden Vokale bedeuten Winkelgeschwindigkeiten, die beiden Konsonanten fortschreitende.

die Zentraltangente selbst als Achse der Momentanschraubung bewegt (vgl. § 5). Der Fortgang der Bewegung ist also eindeutig bestimmt, sobald man eine Anfangslage der Erzeugenden und eine senkrecht schneidende Gerade als Anfangslage der Zentraltangente willkürlich angenommen hat (vgl. übrigens auch den Schluß des § 8). Wir wollen daher sagen, es seien die natürlichen Gleichungen einer Regelfläche gegeben, wenn diese vier Geschwindigkeiten, die wir natürliche Bestimmungsstücke nennen, als Funktionen eines Parameters t gegeben sind. Selbstverständlich kommt es nur auf ihre Verhältnisse an, da die absolute Geschwindigkeit, mit der irgend eine dieser Bewegungskomponenten geschieht, gleichgültig ist. Die Regelflächen hängen also von drei willkürlichen Funktionen ab.

Man kann bei einer vorgegebenen Regelfläche eine der vier Funktionen willkürlich wählen, wie wir schon gelegentlich taten ($\omega = 1$)*); nur schließt man damit je eine von vier besonderen Flächenarten aus, für die je eine der vier Geschwindigkeiten $\omega, \vartheta, \sigma, \eta$ Null ist, nämlich der Reihe nach die zylindrischen Flächen, die abwickelbaren, die orthoiden, diejenigen mit Richtebene. Wenn wir eine der vier Geschwindigkeiten Null setzen und die drei anderen samt den Anfangsbedingungen beibehalten, so bekommen wir zu jeder Regelfläche $\mathfrak{R}$ vier Abbildungen, nämlich der Reihe nach: die zylindrische Abbildung $\mathfrak{C}$, die abwickelbare $\mathfrak{A}$, die orthoide $\mathfrak{O}$ und diejenige mit Richtebene $\mathfrak{R}'$, welche der Kürze halber die konoide Abbildung heißen möge, obgleich man von den Regelflächen mit Richtebene nur diejenigen Konoide zu nennen pflegt, die außer

*) Dies tut auch Antomari in seiner Thèse (Paris 1894), wo man die ausführlichste Belehrung über die Differentialgeometrie der Regelflächen findet, indem seine drei „Invarianten“ ϑ, h, k für $\omega = 1$ der Reihe nach mit unseren Funktionen η, σ, ϑ übereinstimmen. Er wendet die Methode des beweglichen Trieders, die von Darboux in der allgemeinen Flächentheorie in so großer Ausdehnung benutzt wurde, auf das ausgezeichnete Trieder an, das von der Erzeugenden, der Zentraltangente und der Zentralnormalen gebildet wird. Man sieht, daß viele unserer folgenden Formeln durch die Annahme $\omega = 1$ an Symmetrie eingebüßt hätten; auch wegen der Diskussion der singulären Erzeugenden (§ 13) betrachten wir vorläufig alle vier Geschwindigkeiten als gleichberechtigt.

der unendlich fernen Leitgeraden noch eine Leitgerade im Endlichen besitzen. Setzen wir gleichzeitig zwei der vier Geschwindigkeiten Null, so bekommen wir weitere Abbildungen, von denen jedoch nur die konische ($\vartheta = \sigma = 0$) und die „schraubenartige“ ($\eta = \sigma = 0$) einiges Interesse haben. Bei der letzteren schneiden alle Erzeugenden eine feste Gerade senkrecht. Natürlich sind alle diese Abbildungen bis zu einem gewissen Grade unbestimmt, weil wir eine beliebige Erzeugende als Anfangserzeugende wählen können, welche die Anfangsbedingungen der Abbildung bestimmt.

Bei $\mathfrak{C}$ ist zu bemerken, daß zu ihr auch eine Kurve auf der Zylinderfläche gehört, in welche die Striktionslinie bei dieser Abbildung übergeht. Bei $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{D}$ und der konischen Abbildung sind die Erzeugenden parallel zu den entsprechenden von $\mathfrak{R}$ selbst, weil die Richtung der Erzeugenden nur von den Drehungsgeschwindigkeiten ω und η, nicht aber von den Translationsgeschwindigkeiten ϑ und σ abhängt. Bei der orthoiden, der konoiden und der schraubenartigen Abbildung bleibt der Verteilungsparameter $\mathfrak{k}$ nach (1) ungeändert, bei der konoiden außerdem der Winkel der Striktionslinie mit den Erzeugenden. Die konoide Abbildung kann auch durch den Biegungsvorgang des Satzes 7 erhalten werden.

Die Gratlinie (Rückkehrkante) von $\mathfrak{A}$ heiße $\mathfrak{G}$. Zeichnet man die vier Abbildungen der Zentraltangentenfläche $\mathfrak{T}$ durch den Index eins aus, so ist wegen (40) die Fläche der Binormalen von $\mathfrak{A}$ eine $\mathfrak{D}_1$, die Tangentenfläche der Striktionslinie von $\mathfrak{D}$ eine $\mathfrak{A}_1$. Ihre Gratlinie, d. h. die Striktionslinie von $\mathfrak{D}$ selbst, heiße daher $\mathfrak{G}_1$. Die Schmiegungsebenen von $\mathfrak{G}$ sind den entsprechenden asymptotischen Ebenen von $\mathfrak{R}$ parallel, die Binormalen den Zentraltangenten, die Hauptnormalen den Zentralnormalen. Die Schmiegungsebenen von $\mathfrak{G}_1$ sind den Hauptebenen von $\mathfrak{R}$ parallel, die Hauptnormalen ebenfalls den Zentralnormalen. Wenn $\varkappa$ und τ die erste und zweite Krümmung von $\mathfrak{G}$ sind, entsprechend $\varkappa_1$ und τ_1 von $\mathfrak{G}_1$, so ist:

$$\varkappa = \frac{\omega}{\sigma}, \qquad \tau = \frac{\eta}{\sigma} \tag{43}$$

$$\varkappa_1 = \frac{\eta}{\vartheta}, \qquad \tau_1 = \frac{\omega}{\vartheta}. \tag{44}$$

Für $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}_1$ wollen wir die Frenetschen Gleichungen (Scheffers, Theorie der Kurven, Anh. Tafel III, C) aufstellen, bei denen die Bogenlänge die unabhängige Veränderliche ist. Da wir aber lieber t als solche beibehalten wollen, ändern wir entsprechend die Frenetschen Gleichungen: Wir bezeichnen wie a. a. O. die Richtungskosinus der Tangente, Hauptnormale und Binormale von $\mathfrak{G}$ nach folgendem Schema:

(45)

	x	y	z
Tangente	α	β	γ
Hauptnormale	l	m	n
Binormale	λ	μ	ν,

kennzeichnen die entsprechenden Größen für $\mathfrak{G}_1$ durch den Index eins, für die Striktionslinie $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{R}$ durch den Index zwei und verstehen unter s die Bogenlänge von $\mathfrak{G}$. Dann ist z. B.:

$$\frac{d\alpha}{ds} = \varkappa l ,$$

andererseits

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{dt} : \frac{ds}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} : \sigma .$$

Bezeichnen wir also nach wie vor durch Striche Ableitungen nach t, so folgt mit Rücksicht auf (43):

$$\alpha' = \omega l ,$$

analog die übrigen Gleichungen des folgenden Schemas (46), wenn man bedenkt, daß wir wegen unserer Definition des Vorzeichens von η und hiermit der Torsion (§ 5) die beiden anderen Frenetschen Gleichungen (abweichend von der Mehrzahl der Darstellungen) in der Form

$$\frac{dl}{ds} = \tau\lambda - \varkappa\alpha , \qquad \frac{d\lambda}{ds} = -\tau l$$

schreiben müssen*).

*) Da eine Fortschreitungsrichtung längs einer Achse auch den positiven Drehungssinn um dieselbe Achse definiert, so ist, wenn $\Delta\chi$ der Winkel zweier benachbarter Schmiegungsebenen ist, durch

$$(46)\quad \begin{cases} \alpha' = \omega l\,, & l' = \eta\lambda - \omega\alpha\,, & \lambda' = -\eta l\,, \\ \beta' = \omega m\,, & m' = \eta\mu - \omega\beta\,, & \mu' = -\eta m\,, \\ \gamma' = \omega n\,, & n' = \eta\nu - \omega\gamma\,, & \nu' = -\eta n\,. \end{cases}$$

---

§ 8. Die Bestimmung einer Regelfläche aus ihren natürlichen Gleichungen.

Es seien $\omega, \vartheta, \sigma, \eta$ als Funktionen von t gegeben und für einen gewissen „Anfangswert" t, für den weder ω noch σ verschwinde, seien ω und σ nach § 5 positiv gemacht.

a) Wir gehen zunächst darauf aus, die Krümmung $\varkappa_2$ und die Torsion τ_2 der Striktionslinie $\mathfrak{S}$ der Regelfläche $\mathfrak{R}$

---

die Gleichung

$$\tau = \lim \frac{\Delta\chi}{\Delta s}$$

auch das Vorzeichen der Torsion schon definiert. Behält man nun das Schema (45) bei, so steht damit die übliche Schreibweise

$$(a)\qquad \frac{d\lambda}{ds} = \tau l$$

nicht im Einklang. Man erkennt dies schon daraus, daß bei positiver Torsion die sphärische Abbildung der positiven Binormalen (wie die Anschauung unmittelbar lehrt) entgegengesetzt der positiven Richtung der Hauptnormalen sich bewegt und zwar unabhängig davon, ob man ein Zeigersystem erster oder zweiter Art zugrunde legt. Man kann nun entweder auf die geometrische Definition des Vorzeichens der Torsion verzichten und dieses Vorzeichen vielmehr durch die Gleichung (a) definieren (z. B. Scheffers, Theorie der Kurven S. 180, Gleichungen 12) oder das Schema (45) durch Vertauschung der zweiten und dritten Zeile abändern (Knoblauch) oder endlich die übliche Schreibweise der Frenetschen Gleichungen aufgeben (Kneser, J. f. Math. Bd. 113, 1894). Wir haben uns für das letztere entschieden.

Daß Scheffers Zeigersysteme zweiter Art verwendet, macht für diese Frage keinen Unterschied, denn damit kehrt sich konsequenterweise auch der positive Drehungssinn um; vgl z. B. a. a. O. Fig. 36. Vielmehr rührt die Abweichung zwischen Scheffers und Kneser daher, daß ersterer a. a. O. tatsächlich das Vorzeichen der Größe $\frac{1}{\varrho} = \tau$ durch die Frenetschen Gleichungen selber definiert, nachdem die Proportionalität $\frac{d\lambda}{ds} : \ldots = l : m : n$ feststeht.

durch natürliche Bestimmungsstücke auszudrücken. Die Geschwindigkeit, mit der sich der Zentralpunkt bewegt, ist

$$\sqrt{\sigma^2 + \vartheta^2} = W. \tag{47}$$

Nach (42) ist

$$\cos\zeta = \frac{\sigma}{W}, \qquad \sin\zeta = \frac{\vartheta}{W}, \tag{42a}$$

wobei der Anfangswert der Wurzel positiv ist. Daraus folgt für die Richtung der Tangente von $\mathfrak{S}$:

$$\alpha_2 = \frac{\sigma\alpha + \vartheta\lambda}{W}, \qquad \beta_2 = \frac{\sigma\beta + \vartheta\mu}{W}, \qquad \gamma_2 = \frac{\sigma\gamma + \vartheta\nu}{W}. \tag{48}$$

Für $\mathfrak{S}$ ist $\frac{ds_2}{dt} = W$, also mit Benutzung von (46):

$$\frac{\alpha_2'}{W} = \varkappa_2 l_2 = \frac{1}{W^2}[\sigma'\alpha + \vartheta'\lambda + l(\sigma\omega - \vartheta\eta)] - \frac{W'}{W^3}(\sigma\alpha + \vartheta\lambda). \tag{49}$$

Indem man diese und die entsprechenden Gleichungen quadriert denkt und addiert, übersieht man zufolge der Relationen zwischen den Größen des Schemas (45) (Scheffers, a. a. O., Tafel II) sofort, welche Glieder verschwinden und erhält:

$$\varkappa_2^2 = \frac{\sigma'^2 + \vartheta'^2 + (\sigma\omega - \vartheta\eta)^2}{(\sigma^2 + \vartheta^2)^2} - \frac{(\sigma\sigma' + \vartheta\vartheta')^2}{(\sigma^2 + \vartheta^2)^3} \tag{50}$$

oder auch:

$$\varkappa_2^2 = \frac{(\sigma\vartheta' - \sigma'\vartheta)^2 + (\sigma^2 + \vartheta^2)(\sigma\omega - \vartheta\eta)^2}{(\sigma^2 + \vartheta^2)^3}. \tag{51}$$

Wir können jetzt $\lambda_2 = \beta_2 n_2 - \gamma_2 m_2$ aus (48) und (49) berechnen. Bezeichnen wir

$$\frac{\sigma\omega - \vartheta\eta}{W^3\varkappa_2} = A, \qquad \frac{\vartheta\sigma' - \sigma\vartheta'}{W^3\varkappa_2} = B, \tag{52}$$

so ist

$$\lambda_2 = A(\sigma\lambda - \vartheta\alpha) + Bl \tag{53}$$

und

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_2' = -W\tau_2 l_2 = -(A\vartheta' + A'\vartheta + B\omega)\alpha \\ + [B' - A(\sigma\eta + \vartheta\omega)]\, l + (A\sigma' + A'\sigma + B\eta)\lambda, \end{array}\right. \tag{54}$$

also

$$\left\{\begin{array}{l} W^2\tau_2^2 = [(A\vartheta)' + B\omega]^2 + [(A\sigma)' + B\eta]^2 \\ \qquad + [B' - A(\sigma\eta + \vartheta\omega)]^2. \end{array}\right. \tag{55}$$

Es erübrigt noch die Vorzeichenbestimmung von τ_2 für irgend einen Wert τ_0, den man als Anfangswert betrachten kann. Wir legen die X-Achse des rechtwinkligen Systems in die Erzeugende t_0, die Z-Achse in die Zentraltangente wie in § 5 und sagen, die Erzeugende, die Zentralnormale und die Zentraltangente bestimmen das „mit der Regelfläche $\mathfrak{R}$ verbundene Trieder", während Tangente, Hauptnormale und Binormale der Striktionslinie $\mathfrak{S}$ „das mit $\mathfrak{S}$ verbundene Trieder" bestimmen; hierbei ist auch die Reihenfolge dieser Geraden wegen der Winkelzählungen in den Triederebenen von Bedeutung. Nun wird $\alpha = m = \nu = 1$; die übrigen Größen des Schemas (45) verschwinden. Wählt man also $\varkappa_2$ positiv, so sind durch die Formeln (49) für die Größen l_2, m_2, n_2 bestimmte Vorzeichen definiert. Daher ist durch (54) auch für τ_2 ein Vorzeichen definiert. Wir haben also (den übrigens zu erwartenden)

Satz 11: Wenn die natürlichen Gleichungen einer Regelfläche gegeben sind, erfordert die Bestimmung der ersten und zweiten Krümmung der Striktionslinie nur Differentiationen.

Wir berechnen den Winkel ε zwischen der Zentralnormalen von $\mathfrak{R}$ und der Binormalen von $\mathfrak{S}$ (zugleich zwischen $\mathfrak{R}$ selbst und der Schmiegungsebene von $\mathfrak{S}$) und finden aus (53)

$$\cos\varepsilon = \Sigma l\lambda_2 = B. \tag{56}$$

Wenn wir die angegebene Reihenfolge der beiden Geraden festhalten, ist auch der $\sin\varepsilon$ definiert, weil die Zentralnormale auch in einer Ebene des mit $\mathfrak{S}$ verbundenen Trieders enthalten ist. Man kann den $\sin\varepsilon$ aus der Identität

$$B^2 + W^2A^2 = 1 \tag{57}$$

bis aufs Vorzeichen berechnen; zur Bestimmung des letzteren beachte man, daß die Tangente von $\mathfrak{S}$ nach unseren Festsetzungen stets einen Winkel ζ im ersten oder vierten Quadranten mit der Erzeugenden einschließt (§ 5). Man überzeugt sich leicht aus der Anschauung (aus zwei Figuren für die beiden Fälle), daß deswegen die Vorzeichen von ν_2 und $\sin\varepsilon$ stets übereinstimmen. Andererseits ergibt sich aus der Spezialisierung von (53) für die Anfangslage (die ja eine beliebige sein kann)

$$\lambda_2 = -A\vartheta, \quad \mu_2 = B, \quad \nu_2 = A\sigma, \tag{58}$$

daß auch ν_2 und A dasselbe Vorzeichen haben, weil σ positiv gemacht wurde. Also ist

$$\sin\varepsilon = AW. \tag{59}$$

Wenn die Bogenlänge s_2 der Striktionslinie die unabhängige Veränderliche ist und ihr Krümmungshalbmesser mit r_2 bezeichnet wird ($W = 1$), so vereinfachen sich die Gleichungen (50) usw. zu

$$\varkappa_2^2 = \sigma'^2 + \vartheta'^2 + (\sigma\omega - \vartheta\eta)^2 = \frac{1}{r_2^2} \tag{50a}$$

$$\begin{cases} A = r_2(\sigma\omega - \vartheta\eta) = \sin\varepsilon \\ B = r_2(\vartheta\sigma' - \sigma\vartheta') = \cos\varepsilon \end{cases} \tag{52a}$$

$$\begin{cases} \tau_2^2 = \left(\dfrac{d\varepsilon}{ds_2}\right)^2 + 2(\vartheta\omega + \sigma\eta)\dfrac{d\varepsilon}{ds_2} + (A\vartheta' + B\omega)^2 \\ \qquad + (A\sigma' + B\eta)^2 + A^2(\vartheta\omega + \sigma\eta)^2, \end{cases} \tag{55a}$$

oder

$$\begin{cases} \tau_2^2 = \left(\dfrac{d\varepsilon}{ds_2}\right)^2 + 2(\vartheta\omega + \sigma\eta)\dfrac{d\varepsilon}{ds_2} \\ + r_2^2[(\sigma'\omega - \vartheta'\eta)^2 + (\sigma\omega - \vartheta\eta)^2(\vartheta\omega + \sigma\eta)^2]\,. \end{cases} \tag{55b}$$

b) Die Bestimmung einer Raumkurve aus ihrer ersten und zweiten Krümmung, die als Funktionen eines Parameters*) gegeben seien, erfordert die Integration einer Riccatischen Gleichung**) und einige Quadraturen (Scheffers, Theorie der Kurven, II, § 13 f.). Wir nehmen an, man habe auf diesem Wege die Striktionslinie $\mathfrak{S}$ der gesuchten Regelfläche $\mathfrak{R}$ bestimmt und wollen zeigen, daß die vollständige Bestimmung von $\mathfrak{R}$ nun keine weiteren Integrationen mehr erfordert. In der Tat ist durch (56) und (58) die Lage der Zentralnormalen in der Normalebene von $\mathfrak{S}$ eindeutig bestimmt, also auch die Zentralebene von $\mathfrak{R}$ samt

*) Man kann annehmen, dieser Parameter sei die Bogenlänge, indem man die natürlichen Bestimmungsstücke durch $\sqrt{\sigma^2 + \vartheta^2}$ dividieren darf.

**) Darunter versteht man heutzutage eine Differentialgleichung von der Form $y' = a + by + cy^2$, wobei a, b, c Funktionen der unabhängigen Veränderlichen x sind.

einem bestimmten Drehungssinn in ihr gegeben. Weiter ist durch

$$\operatorname{tg}\zeta = \frac{\vartheta}{\sigma} \tag{60}$$

in der Zentralebene die Lage der Erzeugenden selbst gegen die Tangente von $\mathfrak{S}$ bestimmt, so daß zu jedem Punkt von $\mathfrak{S}$ die zugehörige Erzeugende bekannt ist.

Satz 12: Die Bestimmung einer Regelfläche aus ihren natürlichen Gleichungen erfordert keine anderen Integrationen, als die Bestimmung ihrer Striktionslinie aus deren erster und zweiter Krümmung.

Man kann zur Lösung der Aufgabe dieses Paragraphen auch einen andern Weg einschlagen, indem man zunächst die konische Abbildung, dann die Striktionslinie bestimmt. Vgl. hierüber Antomari, Thèse, Art. 9.

Wir haben uns bei der Begründung, daß eine Regelfläche durch ihre natürlichen Gleichungen bis auf ihre Lage im Raume vollständig bestimmt sei, auf eine anschauliche Überlegung gestützt (§ 7), sehen aber jetzt, daß diese Tatsache durch den entsprechenden Satz über Raumkurven auch analytisch bewiesen ist. Denn die Striktionslinien für dieselben Funktionen $\varkappa_2$ und τ_2 sind alle untereinander kongruent (Scheffers, a. a. O. S. 219), daher nach der eben durchgeführten Überlegung auch alle Regelflächen, welche dieselben natürlichen Gleichungen haben.

---

§ 9. Anwendungen auf besondere Regelflächen.

Wir setzen in diesem Paragraphen überall voraus, die Bogenlänge der Striktionslinie sei die unabhängige Veränderliche ($W = 1$). Dann ist

$$\sigma\,\sigma' + \vartheta\,\vartheta' = 0\,. \tag{61}$$

a) Regelflächen mit gerader Striktionslinie. Hier folgt aus (50a):

$$\sigma' = \vartheta' = 0 \tag{62}$$

$$\frac{\eta}{\omega} = \frac{\sigma}{\vartheta} = \text{const}\,. \tag{63}$$

Nun ist $\frac{\eta}{\omega}$ die geodätische Krümmung der sphärischen Abbildung der Regelfläche; also:

Satz 13: Die Regelflächen mit gerader Striktionslinie haben als konische Abbildung einen Umdrehungkegel.

b) Regelflächen mit geodätischer Striktionslinie. Wenn ζ konstant ist, folgt*) aus (60) und (52):

$$B = 0 \tag{64}$$

und umgekehrt. Durch (64) sind diejenigen Flächen gekennzeichnet, deren Striktionslinie geodätisch ist. Es ergibt sich also als Verallgemeinerung des Satzes 10 ein Satz von Bonnet (Journ. de l'éc. polyt. XIX):

Satz 14: Wenn die Striktionslinie eine geodätische Linie ist, so schneidet sie alle Erzeugenden unter demselben Winkel und umgekehrt.

Aus (61) und

$$\vartheta\,\sigma' - \sigma\,\vartheta' = 0$$

folgt, daß (62) auch hier gilt, ferner aus (50a):

$$\varkappa_2 = \pm(\sigma\,\omega - \vartheta\,\eta) \tag{65}$$

und wegen $A = \pm 1$ aus (55)

$$\tau_2 = -(\sigma\,\eta + \vartheta\,\omega)\,. \tag{66}$$

Die Vorzeichenbestimmung von τ_2 geschieht wie im § 8; z. B. ist für $\sigma\,\omega - \vartheta\,\eta \lesseqgtr 0$, wenn $\varkappa_2$ stets positiv gewählt wird, aus (49):

$$m_2 = -m = -1\,,$$

aber auch $A = -1$, so daß aus (54) stets die Gleichung (66) ohne doppeltes Vorzeichen hervorgeht.

Wenn die Striktionslinie außerdem eben ist, folgt aus (66):

$$-\frac{\eta}{\omega} = \frac{\vartheta}{\sigma} = \text{const.} = \operatorname{tg}\zeta\,. \tag{67}$$

Also können wir den Satz 13 verallgemeinern:

Satz 15: Die Flächen mit ebener geodätischer Striktionslinie haben als konische Abbildung einen Umdrehungskegel.

*) Nur für die Flächen mit gerader Striktionslinie läßt sich wegen $\varkappa_2 = 0$ dieser Schluß nicht anwenden. Aber es folgt unmittelbar aus (62), daß auch hier der folgende Satz 14 richtig bleibt.

Hat insbesondere $\mathfrak{R}$ eine Richtebene ($\eta = 0$), so berührt sie den Zylinder $\mathfrak{C}$, der ihre Striktionslinie $\mathfrak{S}$ (die noch immer geodätisch, aber nicht eben sei) auf die Richtebene projiziert, längs $\mathfrak{S}$ selbst (vgl. § 6, a)), und $\mathfrak{S}$ ist nicht nur geodätische Linie von $\mathfrak{R}$, sondern auch von $\mathfrak{C}$. Aus (65) und (66) folgt nun

$$\frac{\varkappa_2}{\tau_2} = \mp \frac{\sigma}{\vartheta} = \mp \cot\zeta . \tag{68}$$

Satz 16: Für die geodätischen Linien der Zylinderflächen ist das Verhältnis der ersten und zweiten Krümmung konstant und zwar ist sein absoluter Wert gleich der Tangente des Winkels, den die geodätische Linie mit den Erzeugenden einschließt.

---

§ 10. Die mit einer Regelfläche verbundenen Flächen.

Wenn eine Gerade g eine Regelfläche $\mathfrak{R}$ beschreibt, so bewegt sich zugleich ihre Hauptebene, ihre asymptotische Ebene, ihre Zentralebene. Die Charakteristik (Definition in Bd. I, § 21) der ersten Ebene nennen wir die zur Lage g gehörige Achse, die der zweiten Nebenachse, die der dritten rektifizierende Gerade, weil sie für den Fall, daß $\mathfrak{R}$ abwickelbar ist, in die rektifizierende Gerade der Gratlinie übergeht und auch sonst stets der rektifizierenden Geraden der Gratlinie $\mathfrak{G}$ einer abwickelbaren Abbildung von $\mathfrak{R}$ parallel ist. Jede der erwähnten Geraden beschreibt eine abwickelbare Regelfläche, die mit $\mathfrak{R}$ verbunden ist; wir erhalten so bei jeder Regelfläche außer den schon früher betrachteten Flächen noch die Achsenfläche, die Nebenachsenfläche, die rektifizierende Fläche.

Wenn die rechtwinkligen Zeiger u, v, w einer Ebene als Funktionen eines Parameters t gegeben sind und die Striche Ableitungen nach t bedeuten, so findet man aus Bd. I, § 33 als Strahlenzeiger der Charakteristik:

$$\begin{cases} \pi_{12} = q_1 = v w' - v' w , & \pi_{34} = q_4 = u' , \\ q_2 = w u' - w' u , & q_5 = v' , \\ q_3 = u v' - u' v , & q_6 = w' . \end{cases} \tag{69}$$

Wir setzen jetzt voraus, für $\mathfrak{R}$ sei

$$\sum_1^3 p_i^2 = 1\,, \qquad \sum_1^3 p_i'^2 = \omega^2 = 1\,.$$

Dann kann man aus (69) und § 2 die Darstellung der früher definierten drei Regelflächen ableiten. Wir benötigen nur den Ausdruck für die Achse:

$$q_1 = \frac{p_2 p_3' - p_3 p_2'}{\Delta^2}\,, \qquad q_4 = \frac{p_1 \Delta' - p_1' \Delta}{\Delta^2}\,, \tag{70}$$

usw. Man findet durch Vergleich mit (34), daß die Achse der Zentraltangente parallel ist, was man übrigens auch daraus hätte erschließen können, daß sie zur Krümmungsachse von $\mathfrak{G}$ parallel ist, während die Zentraltangente zur Binormalen von $\mathfrak{G}$ parallel ist. Da die asymptotische Ebene mit der Hauptebene des Striktionsbandes identisch ist (§ 5), folgt auch der zweite Teil des folgenden Satzes:

Satz 17: Die Achse ist zur Zentraltangente, die Nebenachse zur Erzeugenden selbst parallel.

Die Achsenfläche heiße wegen der Analogie mit der Kurventheorie auch Polarfläche, ihre Gratlinie Polarlinie der ursprünglichen Regelfläche $\mathfrak{R}$. Ein Punkt der Polarlinie kann als Grenzlage des Schnittes dreier benachbarter Hauptebenen gefunden werden: Es sei in den laufenden Zeigern X, Y, Z

$$\Sigma(X - x)\alpha = 0 \tag{71}$$

die Gleichung einer Hauptebene, wobei x, y, z die Zeiger des Zentralpunktes sind. Man muß diese Gleichung zweimal nach t differenzieren, dabei X, Y, Z als konstant betrachten und die Gleichungen (46) anwenden (über die Bedeutung der Symbole vgl. § 7 und 8):

$$\omega \Sigma(X - x) l = \Sigma x' \alpha = W \cos\zeta = \sigma$$

oder

$$\Sigma(X - x) l = \frac{1}{\varkappa} = r\,, \tag{72}$$

$$\Sigma(X - x)\lambda = \frac{r'}{\eta}\,. \tag{73}$$

Aus (71)—(73) finden wir:

$$X = x + r\,l + \frac{r'}{\eta}\lambda \tag{74}$$

usw. als Zeiger eines Punktes A der Polarlinie.

Die Gratlinie der Nebenachsenfläche von $\mathfrak{R}$ heiße Nebenpolarlinie. Zu ihrer Bestimmung gehen wir von der Gleichung einer asymptotischen Ebene mit den laufenden Zeigern $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ aus:

$$\Sigma(\mathfrak{x} - x)\lambda = 0\,.$$

Nach zweimaliger Differentiation erhält man auf analogem Wege wie oben als Zeiger eines Punktes B der Nebenpolarlinie, wenn man $\frac{\vartheta}{\eta} = \varrho$ setzt:

$$\mathfrak{x} = x - \varrho\,l + \frac{\varrho'}{\omega}\alpha\,, \tag{75}$$

usw.

Die Entfernungen e_1, e_2 des Zentralpunktes von den Punten A und B sind gegeben durch

$$\begin{cases} e_1^2 = \Sigma(X - x)^2 = r^2 + \dfrac{r'^2}{\eta^2}\,, \\ e_2^2 = \Sigma(\mathfrak{x} - x)^2 = \varrho^2 + \dfrac{\varrho'^2}{\omega^2}\,. \end{cases} \tag{76}$$

Man bemerkt die Analogien mit der Bestimmung des Mittelpunktes der Schmiegungskugel in der Theorie der Raumkurven. Aus dem Bau der Gleichungen (75) geht hervor, daß ϱ die Entfernung zwischen der Erzeugenden und ihrer Nebenachse ist.

---

§ 11. Eine ausgezeichnete Erzeugungsart der Regelflächen.

Man weiß, daß eine Raumkurve C auf ∞^1 Arten als Filarevolvente, auf eine einzige Art als Planevolvente einer anderen Kurve C_1 aufgefaßt werden kann. Zur letzteren Erzeugungsart besteht auch für eine Regelfläche $\mathfrak{R}$ ein Analogon. Wir verweilen aber zunächst noch etwas beim Spezialfall der abwickelbaren Regelflächen, wo die Sachlage aus

der Theorie der Raumkurven bekannt ist: Bewegt man eine Ebene E so, daß sie immer Normalebene einer gegebenen Kurve C bleibt, so ist dadurch noch keineswegs die Bewegung ihrer einzelnen Punkte bestimmt, indem man während einer solchen Bewegung E in sich selbst um einen beliebigen ihrer Punkte mit beliebiger Geschwindigkeit drehen kann. Aber auch wenn man weiter verlangt, ein in E fester Punkt P soll die Kurve C beschreiben, so ist dadurch die Bewegung noch nicht bestimmt. Man pflegt ja in der Theorie der Raumkurven zwei spezielle Bewegungen zu betrachten, die das Verlangte leisten:

Erstens kann man E auf der Polarlinie C_1 von C (das ist der Gratlinie der Polarfläche) „wälzen", d. h.: E soll stets Schmiegungsebene von C_1 bleiben, und ihre Momentanwindung soll sich auf eine reine Drehung so reduzieren, daß sie durch einen Drehungsstab δ auf einer Tangente von C_1 dargestellt werden kann. Vermöge dieser Wälzung durchläuft die Ebene E die Gesamtheit der Normalebenen von C, und der Punkt P bewegt sich stets normal zu E, beschreibt also die gegebene Kurve C, wenn er zu irgend einer Zeit auf C lag. Die Normale n von E in P, die wir mit E fest verbunden denken, beschreibt die Tangentenfläche von C.

Hieran wird nichts geändert, wenn wir eine Drehung um die Achse n mit willkürlich wechselnder Geschwindigkeit hinzufügen, die durch einen auf n liegenden Stab δ_1 veränderlicher Länge dargestellt werden kann. Es kommt nur auf das Verhältnis der Längen von δ und δ_1 an, da die absolute Geschwindigkeit, mit der die Bewegung geschieht, gleichgültig ist. Man kann also (während früher $\delta_1 = 0$ war) zweitens δ_1 so wählen, daß eine mit E fest verbundene Ebene Schmiegungsebene von C bleibt. Dann setzen sich die Drehungsstäbe δ und δ_1 zur Momentanschraubung des mit C verbundenen Trieders zusammen.

Wir kehren zum allgemeinen Fall der Raumkurven zurück, indem wir für eine bestimmte Lage des Systems δ fest halten und die Länge von δ_1 verändern. So erhalten wir für diese Lage ∞^1 Windungen, die ein lineares System bilden. Denn wenn a_ν die Zeiger von δ, b_ν die irgend eines Stabes δ_1 sind, so sind $a_\nu + k\,b_\nu$ die Zeiger einer solchen Windung. Da δ und δ_1 sich senkrecht kreuzen,

erfüllen also die Momentanachsen für jeden regulären Punkt von C ein eigentliches Zylindroid (Bd. I, § 74), dasselbe, das von den Achsen der in zweiter Ordnung berührenden Schraubenlinien gebildet wird (Scheffers, Theorie der Kurven, S. 194). Im Ganzen bekommen wir also ∞^2 mögliche Momentanachsen, die sich auf ∞^1 Zylindroide verteilen und eine Kongruenz $\mathfrak{C}$ bilden. Da man die Länge von δ_1 beim Übergang zu einer Nachbarlage in beliebiger Weise stetig ändern kann, so kann man auch von einer gewählten Momentanachse eines Zylindroids zu einer beliebigen benachbarten Achse des Nachbarzylindroids übergehen. Also kann eine beliebige in $\mathfrak{C}$ enthaltene Regelfläche (außer den erwähnten Zylindroiden selbst) die Fläche der Momentanachsen für eine solche Bewegung von E sein, bei welcher der in E feste Punkt P die Kurve C beschreibt.

Wir gehen nun zum Fall einer allgemeinen Regelfläche $\mathfrak{R}$ über: Wir wollen $\mathfrak{R}$ dadurch erzeugen, daß wir eine Ebene E so bewegen, daß sie erstens immer Hauptebene von $\mathfrak{R}$ bleibt und daß dabei zweitens ein in ihr fester Punkt P die Striktionslinie von $\mathfrak{R}$ beschreibt; dann wird die Normale n von E in P die gewünschte Fläche $\mathfrak{R}$ beschreiben. Wenn wir E zunächst auf der Polarlinie C_1 von $\mathfrak{R}$ wälzen, so wird die erste Forderung erfüllt, aber nicht die zweite; hierbei kann die Drehung in jedem Augenblick durch einen Drehungsstab δ auf einer Tangente von C_1 dargestellt werden. Zur Erfüllung der zweiten Forderung erteilen wir der Ebene E noch eine Drehungsgeschwindigkeit in sich, so daß dem Punkte P noch die Geschwindigkeitskomponente ϑ in der Richtung der Zentraltangente erteilt wird. Wir haben also die Auswahl zwischen ∞^1 Drehungsachsen, die ein durch n bestimmtes Parallelbüschel in der asymptotischen Ebene von $\mathfrak{R}$ bilden. Die zu wählende Drehungsgeschwindigkeit δ_1 ist umgekehrt proportional dem Abstande zwischen n und der gewählten Drehungsachse. Der konstante Stab δ und der veränderliche δ_1 definieren für eine bestimmte Lage des Systems ∞^1 Windungen, die ein lineares System bilden müssen. Denn wenn wir eine bestimmte Auswahl δ, δ_1 mit einer anderen δ, δ_1' in beliebigem Verhältnis v superponieren, so ergibt sich die Windung, die durch die beiden Stäbe

$$\delta(1+v) \quad \text{und} \quad \delta_1 \dotplus v\,\delta_1'$$

dargestellt ist, wobei $\dotplus$ das Zeichen für die Zusammensetzung paralleler Stäbe (Kräfte oder Drehungen) ist. Diese Windung erteilt P die Geschwindigkeit $\vartheta(1+v)$; sie kann also durch Division mit $1+v$ so abgeändert werden, daß sie ebenfalls der definierten Mannigfaltigkeit angehört. Daraus folgt, daß die Achsen der Windungen auch hier ein Zylindroid bilden und die weiteren Schlüsse bleiben auch im allgemeinen Fall aufrecht und führen zum

Satz 18: Bewegt man eine Ebene E so, daß sie stets Hauptebene einer gegebenen Regelfläche $\mathfrak{R}$ bleibt und daß ein in ihr fester Punkt P die Striktionslinie von $\mathfrak{R}$ beschreibt, so bilden die möglichen Momentanachsen in jedem Augenblick ein Zylindroid, im Ganzen eine Kongruenz $\mathfrak{C}$. Jede Regelfläche von $\mathfrak{C}$ mit Ausnahme dieser Zylindroide ist als Fläche der Momentanachsen einer Bewegung brauchbar bei der die gegen E feste in P errichtete Normale von E die Fläche $\mathfrak{R}$ beschreibt.

Wir untersuchen unter diesen Bewegungen den ausgezeichneten Fall genauer, daß sich die gewählte Drehungsachse von δ_1 ins Unendliche entfernt, wodurch sich die Drehung auf eine Schiebung ϑ in der Richtung der Zentraltangente und zugleich der Tangente t von C_1 (Satz 17) reduziert. Die Momentanachse der Windung ist jetzt t selbst. Wir sagen, eine Ebene „schrotet längs einer Raumkurve", wenn sie sich so bewegt, daß sie stets Schmiegungsebene der Kurve bleibt und daß die Achse der Momentanwindung stets in die Tangente der Kurve fällt. Gegenüber der früher definierten Wälzung kommt also in jedem Augenblick noch eine willkürliche Schiebungsgeschwindigkeit in der Richtung der Tangente hinzu. Dann können wir das jetzige Ergebnis so aussprechen:

Satz 19: Jede Regelfläche $\mathfrak{R}$, deren Polarlinie eine eigentliche Raumkurve ist, kann auf eine einzige Art so erzeugt werden, daß eine Ebene auf der Polarlinie von $\mathfrak{R}$ in passender Weise schrotet und dabei eine ihrer Normalen mitführt.

Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung des bekannten Satzes, daß eine Raumkurve auf eine einzige Art durch Wälzung einer Ebene an ihrer Polarlinie erzeugt werden kann und sondert sozusagen die neue willkürliche Funktion

aus, die bei der Mannigfaltigkeit der Regelflächen gegenüber den Raumkurven hinzutritt (§ 7). Dies ist nämlich die Schiebungskomponente ϑ, die in der Tat bei den abwickelbaren Flächen Null ist.

Wir wollen noch die natürlichen Gleichungen der Polarlinie von $\mathfrak{R}$ aufstellen, indem wir zunächst die Geschwindigkeit V des Punktes A aus (74) berechnen:

$$X' = x' - \sigma\alpha + \lambda\left[r\eta + \left(\frac{r'}{\eta}\right)'\right].$$

Setzen wir

$$v = r\eta + \left(\frac{r'}{\eta}\right)' \tag{77}$$

und wählen das Zeigersystem so, daß seine Achsen in die Kanten des mit $\mathfrak{R}$ verbundenen Trieders fallen, so wird für den Spezialfall der abwickelbaren Flächen $V = v$ (und auch für eine abwickelbare Abbildung von $\mathfrak{R}$)*). Allgemein ist nun

$$V^2 = \Sigma X'^2 = \Sigma x'^2 - 2\sigma\Sigma x'\alpha + \sigma^2 + 2v\Sigma x'\lambda + v^2 .$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \Sigma x'^2 &= \sigma^2 + \vartheta^2 \\ \Sigma x'\alpha &= W\cos\zeta = \sigma \\ \Sigma x'\lambda &= W\sin\zeta = \vartheta , \end{aligned}$$

also:

$$V^2 = (v + \vartheta)^2 .$$

Um das Vorzeichen bei der Wurzelausziehung richtig zu bestimmen, beachte man, daß für die abwickelbaren Flächen $V = v$ werden muß, daher:

$$V = v + \vartheta . \tag{78}$$

Wenn wir die natürlichen Bestimmungsstücke der Polarfläche $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{R}$ durch den Index Null kennzeichnen, so folgt aus der Lage der Polarfläche gegen die ursprüngliche:

$$\sigma_0 = v + \vartheta , \quad \vartheta_0 = 0 , \quad \omega_0 = \eta , \quad \eta_0 = \omega . \tag{79}$$

Wir haben also die natürlichen Bestimmungsstücke von $\mathfrak{P}$ durch diejenigen von $\mathfrak{R}$ selbst ausgedrückt. Eine abwickel-

*) Es wird nämlich $\alpha = m = \nu = 1$, während die übrigen Größen des Schemas (45) verschwinden; ferner wird $x' = \sigma$, also $X' = Y' = 0$, $Z' = v$.

bare Abbildung von $\mathfrak{R}$ hat eine Polarfläche $\mathfrak{P}_a$, deren natürliche Bestimmungsstücke aus (79) erhalten werden, indem man $\vartheta = 0$ setzt (v ist von ϑ frei). Für die Gratlinie C_1 von $\mathfrak{P}$ sind die erste und zweite Krümmung:

$$\varkappa_0 = \frac{\omega_0}{\sigma_0}, \qquad \tau_0 = \frac{\eta_0}{\sigma_0}$$

analog für die Gratlinie von $\mathfrak{P}_a$; also:

Satz 20: Das Verhältnis von Krümmung und Torsion ist in entsprechenden Punkten der Polarlinie einer Regelfläche und der Polarlinie ihrer abwickelbaren Abbildung dasselbe.

Die Geraden in E, die der Reihe nach während der Bewegung mit den Tangenten von C_1 zusammenfallen, umhüllen eine Kurve C_e, längs welcher der Berührungspunkt mit der Geschwindigkeit v fortschreitet, weil die Führungsgeschwindigkeit ϑ von der absoluten abzuziehen ist. Die natürlichen Gleichungen von C_e sind also:

$$\sigma_e = v, \quad \omega_e = \omega_0 = \eta. \tag{80}$$

Eine andere ausgezeichnete Erzeugungsart der Regelflächen, bei der die asymptotischen Ebenen eine ähnliche Rolle spielen, wie hier die Hauptebenen, hat Antomari angegeben (Thèse, Art. 14); vgl. Aufg. 8.

---

§ 12. Die allgemeine Regelschraubenfläche.

Wir wollen zu den Untersuchungen der vorhergehenden Paragraphen ein Beispiel bringen: Auf dem Zylinder vom Halbmesser a liege eine Schraubenlinie S mit dem Neigungswinkel ψ, deren Gleichungen wir also in der Form:

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = a\,t\,\mathrm{tg}\,\psi \end{cases} \tag{81}$$

ansetzen können. Wir denken uns die Z-Achse vertikal. Eine Gerade g bewege sich so, daß sie gegen die XY-Ebene stets unter dem Winkel φ geneigt ist und daß sie den Zylinder stets in einem Punkte von S berührt. Die Winkel

φ und ψ sollen so gezählt werden wie ϑ in Bd. I, § 1. Dann beschreibt g eine „offene schiefe Regelschraubenfläche“ $\mathfrak{R}$ (Terminologie nach Rohn und Papperitz, Darst. Geom. II, Art. 603 ff.), die im allgemeinen windschief ist und nur dann abwickelbar, wenn $\varphi = \psi$ ist. Mit Hilfe der sphärischen Abbildung, die ein horizontaler Kreis ist, erkennt man, daß die asymptotische Ebene (parallel zur Berührungsebene der konischen Abbildung) den kürzesten Abstand zwischen g und der Zylinderachse enthält; deshalb ist die Zentralebene vertikal und S zugleich die Striktionslinie. Um die Vorstellung zu fixieren, setzen wir voraus, S sei rechtsgewunden, also

$$0 < \psi < \frac{\pi}{2},$$

belassen jedoch für φ vorläufig das ganze Intervall Null bis π. Der Drehungssinn von g bei wachsendem t wird stets von oben positiv erscheinen. Es zeigt also auch die Z-Achse des mit $\mathfrak{R}$ nach § 5 verbundenen Trieders T in den oberen Halbraum. Daraus folgt: Für das Intervall $\psi < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ist $\vartheta < 0$, sonst positiv. Damit σ positiv werde, ist die X-Achse von T für $0 < \varphi < \psi + \frac{\pi}{2}$ in diejenige Richtung von g zu verlegen, die in den oberen Halbraum führt. Da auch der Drehungssinn der Zentraltangente g_1 von oben betrachtet positiv erscheint, so wird η dann positiv sein, wenn die erwähnte X-Achse in den oberen Halbraum führt. Wir haben also folgende Tafel:

	ϑ	η	$\mathfrak{k} = \frac{\vartheta}{\omega}$	$\mathfrak{k}_1 = \frac{\sigma}{\eta}$
$0 < \varphi < \psi$	> 0	> 0	> 0	> 0
$\psi < \varphi < \frac{\pi}{2}$	< 0	> 0	< 0	> 0
$\frac{\pi}{2} < \varphi < \psi + \frac{\pi}{2}$	> 0	> 0	> 0	> 0
$\psi + \frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$	> 0	< 0	> 0	< 0

Aus der vorletzten Spalte entnimmt man, ob $\mathfrak{R}$ linksgewunden ($\mathfrak{k} > 0$) oder rechtsgewunden ist, aus der letzten Spalte die analoge Entscheidung für das Striktionsband. Die Ergebnisse stimmen mit der unmittelbaren Anschauung überein. Um σ und ϑ zu erhalten, müssen wir die Geschwindigkeit

$$W = \frac{a}{\cos\psi} \tag{82}$$

nach den Richtungen g und g_1 zerlegen; also gilt für den ersten Quadranten von φ:

$$\sigma = \frac{a}{\cos\psi}\cos(\psi - \varphi) = a(\cos\varphi + \operatorname{tg}\psi \sin\varphi) \tag{83}$$

$$\vartheta = \frac{a}{\cos\psi}\sin(\psi - \varphi) = a(\operatorname{tg}\psi\cos\varphi - \sin\varphi)\,. \tag{84}$$

Wir verfolgen von nun an bloß den Fall, daß φ im ersten Quadranten liegt und bemerken bloß, daß für die dritte Zeile der Tafel bei (84), für die vierte Zeile bei beiden Formeln das Vorzeichen zu ändern ist. Aus der sphärischen Abbildung erkennt man ferner:

$$\omega = \cos\varphi\,, \quad \eta = \sin\varphi\,. \tag{85}$$

Wie vorauszusehen war, sind die vier natürlichen Bestimmungsstücke konstant. Da die Achse und die Nebenachse abwickelbare Schraubenflächen beschreiben, genügt es, für $t = 0$ die Abstände der zugehörigen Achse und Nebenachse vom Ursprung zu suchen. Man findet zunächst

$$\begin{cases} r = \dfrac{\sigma}{\omega} = a(1 + \operatorname{tg}\psi\operatorname{tg}\varphi)\,, \\ \varrho = \dfrac{\vartheta}{\eta} = a(\operatorname{tg}\psi\cot\varphi - 1)\,, \end{cases} \tag{86}$$

dann aus (74) und (75), weil für diese Anfangslage $l = -1$ ist:

$$\begin{cases} X = -a\operatorname{tg}\psi\operatorname{tg}\varphi\,, \\ \mathfrak{x} = a\operatorname{tg}\psi\cot\varphi\,. \end{cases} \tag{87}$$

Man kann die letzten beiden Größen auch aus der Theorie des Nullsystems bestätigen (Aufg. 9). X und $\mathfrak{x}$ sind zugleich die Halbmesser der Zylinder, auf denen die Polarlinie $\mathfrak{P}$ und beziehungsweise die Nebenpolarlinie $\mathfrak{P}_1$ (beides

Schraubenlinien) liegen. Unter Anwendung der Gleichung (82) auf $\mathfrak{P}$ findet man also:

$$V = \frac{|X|}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)} = \frac{a \operatorname{tg}\psi}{\cos\varphi}. \tag{88}$$

Nach (77) ist hier

$$v = r\eta = a\sin\varphi + a\operatorname{tg}\psi\frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}.$$

Nach der allgemeinen Theorie muß $V = v + \vartheta$ sein (78), was sich bestätigt.

Die Kurve C_e, von der am Schlusse des § 11 die Rede war, ist hier ein Kreis vom Halbmesser

$$\frac{\sigma_e}{\omega_e} = \frac{v}{\eta} = r.$$

Die Art der Schrotung einer Kurve auf einer anderen ist (abgesehen von der absoluten Geschwindigkeit in jedem Augenblick) vollkommen bestimmt, wenn der Parameter $\frac{\vartheta}{\eta_0}$ der Momentanschraubung bekannt ist; wir sagen dann, die Kurve „schrote mit diesem Parameter" auf der anderen. Also:

Satz 21: Eine Regelschraubenfläche mit den Bestimmungsstücken a, ψ, φ entsteht auch, wenn ein Kreis vom Halbmesser $a(1 + \operatorname{tg}\psi\operatorname{tg}\varphi)$ auf einer Schraubenlinie, deren Zylinderhalbmesser $a\operatorname{tg}\psi\operatorname{tg}\varphi$, deren Steigungswinkel $\frac{\pi}{2} - \varphi$ ist, mit dem Parameter $a(\operatorname{tg}\psi - \operatorname{tg}\varphi)$ schrotet. Dabei beschreibt die Achse des Kreises die Fläche.

Berechnet man den Krümmungshalbmesser R der Polarlinie nach den Formeln der Kurventheorie, so findet man

$$R = \frac{a\operatorname{tg}\psi}{\sin\varphi\cos\varphi}.$$

Andererseits muß nach (79) sein:

$$R = \frac{\sigma_0}{\omega_0} = \frac{V}{\eta},$$

was nach (85) und (88) wieder übereinstimmt.

§ 13. Die singulären Erzeugenden.

Wir knüpfen an eine Analogie mit der Kurventheorie an: Wenn die Geschwindigkeit σ des Kurvenpunktes ihr Vorzeichen ändert, so haben wir eine Spitze vor uns; wenn die Winkelgeschwindigkeit ω der Tangente ihr Zeichen ändert, entsteht ein Wendepunkt; wenn endlich die Winkelgeschwindigkeit η der Schmiegungsebene durch Null geht, ist ein Undulationspunkt vorhanden. Es können auch mehrere dieser Vorkommnisse zugleich eintreten und überhaupt die Vorzeichen der Geschwindigkeiten (den regulären Fall eingeschlossen) $2^3 = 8$ Kombinationen bilden. Um sich annähernd eine anschauliche Vorstellung vom Verlauf der Kurven in der Umgebung solcher Punkte zu verschaffen, lege man das mit der Kurve in einem regulären Punkt P verbundene Trieder. Durch P selbst wird die Umgebung von P in zwei Stücke geteilt. Das eine Stück spiegle man einmal oder mehrmals an den Ebenen des Trieders*) (vgl. auch Wiener, Darst. Geom. I, Art. 257 f. und Mehmke, Über die Benennung u. kinem. Unterscheidung der versch. Arten von Kurvenpunkten, Zeitschr. f. Math. u. Phys. Bd. 49). Ganz dasselbe gilt natürlich auch für die mit den Kurven verbundenen abwickelbaren Tangentenflächen.

Bei den allgemeinen Regelflächen tritt nun eine vierte Geschwindigkeit ϑ hinzu, und wir werden jede Erzeugende unter die singulären rechnen, bei welcher eine oder mehrere dieser vier Geschwindigkeiten durch Null hindurchgehend ihre Vorzeichen ändern**). Dies gibt einschließlich des

*) Durch den Vorgang der Spiegelung kommen Unstetigkeiten in die Geschwindigkeiten hinein; also ist das Bild nicht in jeder Beziehung treu und soll nur die Wirkung des Vorzeichens der Geschwindigkeiten veranschaulichen.

**) Wir setzen immer voraus, daß sich die Geschwindigkeiten stetig ändern und können auch den Fall ausschließen, daß eine von ihnen unendlich wird. Denn da es nur auf ihre Verhältnisse ankommt, so können wir die Bewegung der Erzeugenden so vornehmen, daß irgend eine der vier Geschwindigkeiten, die nicht gerade durch Null geht, an der betreffenden Stelle einen vorgeschriebenen Wert hat. Würde nun eine andere Geschwindigkeit dabei unendlich, so würden wir die Bewegung so abändern, daß die letztere Geschwindigkeit einen endlichen Wert erhält; dann würde die erstere Null werden. Auch den Fall, daß alle vier Geschwindigkeiten zugleich Null werden, kann man durch Abänderung der absoluten Geschwindigkeit der Bewegung immer vermeiden, außer im Falle alle vier gleichzeitig ihr Vorzeichen ändern.

regulären Falles 16 Kombinationen, also 15 Arten singulärer Erzeugenden, die wir je nach der Geschwindigkeit, welche durch Null geht, so benennen:

Bei Änderung von σ, orthoide Erzeugende,
„ „ „ ϑ, torsale „ ,
„ „ „ ω, Wende- „ ,
„ „ „ η, Undulations- „ .

Eine Erzeugende kann natürlich zugleich orthoid und torsal sein, wenn sowohl σ als ϑ ihr Zeichen ändern usw. Dagegen wollen wir sie eine gewöhnliche singuläre Erzeugende nennen, wenn eine einzige der vier Geschwindigkeiten so ihr Zeichen ändert, daß sie mit einer von Null verschiedenen Ableitung durch Null geht und die anderen endlich und von Null verschieden bleiben. Die erste Benennung rechtfertigt sich dadurch, daß die Striktionslinie eine orthoide Erzeugende senkrecht schneidet, die beiden letzten durch die Analogie mit der Kurventheorie. Der Name torsale Erzeugende oder „Torsallinie“ kommt daher, daß man früher eine abwickelbare Fläche auch Torsus nannte und daß eine allgemeine Regelfläche längs einer Torsallinie sich in mancher Beziehung wie eine abwickelbare verhält (Satz 23). Die Berührungsebene der Regelfläche längs einer Torsallinie heißt Torsalebene.

Ferner wollen wir alle Erzeugenden unter die singulären rechnen, für welche eine (oder mehrere) der vier Geschwindigkeiten den Wert Null erreicht, ohne das Zeichen zu ändern. Als noch höherer Ausnahmefall ist es zu betrachten, wenn eine Geschwindigkeit so durch Null geht, daß auch ihre Ableitung Null wird. Diese Fälle können sich natürlich kombinieren, indem z. B. eine Geschwindigkeit, ohne ihr Zeichen zu ändern, eine andere mit Vorzeichenwechsel durch Null geht usw.

Wenn endlich im Verlauf der Bewegung die Gerade mehrmals in dieselbe Lage kommt, so entsteht eine mehrfache Erzeugende (als gewöhnlicher Fall eine Doppelerzeugende), die wir auch als singulär betrachten.

Als regulär bleiben also bei den allgemeinen*)

*) Als allgemein bezeichnen wir für unsere jetzigen Zwecke diejenigen Regelflächen, bei denen nicht eine der vier Geschwindigkeiten immer Null ist; dagegen sollen die vier in § 7 erwähnten Arten von Regelflächen besondere heißen.

Regelflächen nur diejenigen Erzeugenden übrig, die nicht mehrfach sind und bei denen sich die Bewegung so vollziehen läßt, daß alle vier Geschwindigkeiten endlich und von Null verschieden sind.

Für die besonderen Regelflächen wäre diese Definition unzweckmäßig, da nach ihrem Wortlaut alle Erzeugenden einer solchen Fläche singulär wären. Wir ändern sie daher für die besonderen Regelflächen so ab, daß wir die Geschwindigkeit, welche immer Null ist, überhaupt außer Betracht lassen und im übrigen dieselben Benennungen beibehalten. Die Zahl der möglichen Fälle halbiert sich. Für die noch spezielleren Flächen, bei denen zwei Geschwindigkeiten fortwährend Null sind, müssen diese beiden außer Betracht bleiben. Beispielsweise ist also eine äußerste Erzeugende eines Zylindroids (Bd. I, § 75) der typische Fall einer „gewöhnlichen Torsallinie" einer „schraubenartigen" (§ 7) Regelfläche.

Bei dieser großen Mannigfaltigkeit verschiedener Arten von Singularitäten wollen wir uns auf die Diskussion einiger typischen Fälle beschränken. Aus den Gleichungen (41) geht hervor*):

Satz 22: Bei jeder gewöhnlichen singulären Erzeugenden ändert entweder die Regelfläche selbst oder ihr Striktionsband die Windung.

Ferner folgt aus § 1:

Satz 23: Alle Punkte einer Torsallinie oder einer Wendeerzeugenden haben dieselbe Berührungsebene.

Wir wollen uns vom Verlauf einer Regelfläche in der Umgebung einer gewöhnlichen Torsallinie eine anschauliche Vorstellung verschaffen und betrachten zuerst den Fall der Regelflächen mit Richtebene: Wir denken uns in einer vertikalen Ebene E eine Kurve C_1 gezeichnet, die einen höchsten Punkt H und in diesem einen endlichen Krümmungshalbmesser habe. Dann biegen wir E zu einem Zylinder mit vertikalen Erzeugenden; die durch H gehende heiße a. Die horizontale Basiskurve B, welche die Form

*) Es wurde zwar in § 7 und 8 vorausgesetzt, daß für die betrachtete Stelle σ und ω nicht negativ seien. Aber die Gültigkeit aller Gleichungen bleibt bei stetiger Änderung aller darin vorkommenden Größen auch unabhängig davon erhalten; nur muß man negative Werte der ersten Krümmung $\varkappa$ jetzt zulassen.

UNIVERSITY OF

des Zylinders bestimmt, können wir beliebig wählen, nur soll sie in ihrem auf a liegenden Punkte H' eine endliche und von Null verschiedene Krümmung haben. C_1 geht durch Biegung in eine Kurve C über (Fig. 3), welche noch immer in H einen höchsten Punkt hat. Nun bewegen wir eine Gerade g so, daß sie immer horizontal bleibt und daß sie den Zylinder immer in einem Punkte P von C berührt. Rückt P nach H, so rückt g in eine Lage t, welche gewöhnliche Torsalerzeugende der durch g beschriebenen Regelfläche $\mathfrak{R}$ ist; C ist die Striktionslinie von $\mathfrak{R}$ (vgl. Satz 8).

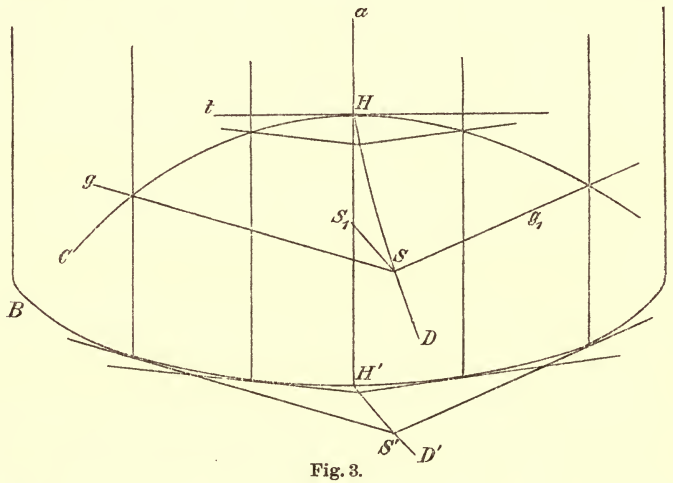

Fig. 3.

Da B eine beliebige Kurve war, so ist ω als eine willkürliche Funktion von σ zu betrachten, und da C_1 eine beliebige Kurve war, so ist auch ϑ als eine willkürliche Funktion von σ anzusehen. Es hat also $\mathfrak{R}$ keine andere Besonderheit, als daß sie eine Fläche mit Richtebene ist.

Zwei Erzeugende g und g_1 im selben Niveau haben einen Schnittpunkt S; der Ort der Punkte S ist eine Doppellinie D der Fläche. Die horizontale Projektion D' von D kann die Basis B in H' unter einem beliebigen Winkel verlassen; denn man kann umgekehrt von H' eine beliebige Kurve D' in der Basisebene ausgehen lassen, dann von den Punkten dieser Kurve an B auf beiden Seiten der Um-

gebung von H' die Tangenten ziehen und C so annehmen, daß sie über den beiden Berührungspunkten zweier so zugeordneten Tangenten dieselbe Höhe hat. Ist ferner S_1 der Fußpunkt der Normalen von S auf a, so werden S_1S und S_1H, wenn S auf D nach H einrückt, beide von derselben Ordnung unendlich klein, nämlich von der zweiten, wenn man das Bogenelement von B als unabhängige Veränderliche wählt. Also kann auch der Winkel, den die Tangente von D in H mit der horizontalen Ebene bildet, ein beliebiger sein. Da eine allgemeine Regelfläche stets durch Biegung aus einer solchen mit Richtebene erhalten werden kann, so bleiben diese Ergebnisse auch für eine allgemeine Regelfläche richtig. Nur wird sich durch die Biegung der Schnitt der beiden Mäntel sowohl relativ zum einen wie zum anderen Mantel verschieben.

Satz 24: Bei den Regelflächen mit Richtebene und bei den allgemeinen Regelflächen wird eine gewöhnliche Torsallinie in ihrem Zentralpunkt H von der Striktionslinie berührt. Von H geht eine Doppellinie aus (in einer Richtung, die nicht irgendwie ausgezeichnet ist); in ihr schneiden sich die beiden Mäntel, in welche die Umgebung der Torsallinie durch diese selbst geteilt wird.

Anders ist es bei den orthoiden Regelflächen: Diejenigen mit Richtebene sind mit den „schraubenartigen Regelflächen" identisch. Hat eine solche eine gewöhnliche Torsallinie, so ist die Gerade g, auf der sämtliche Erzeugende senkrecht stehen, zugleich eine Doppellinie, die in ihrem Schnittpunkt H mit der Torsallinie einen Endpunkt hat. Durch Biegung dieser Fläche teilt sich die Striktionslinie g in zwei Zweige, die in H in einer Spitze zusammenstoßen.

In der Umgebung solcher singulären Erzeugenden, wo ϑ ohne Zeichenänderung Null wird (der allgemeine Fall: $\vartheta = \vartheta' = 0$, $\vartheta'' \neq 0$), hat die Regelfläche ein ganz anderes Aussehen, als in der Umgebung einer gewöhnlichen Torsallinie; z. B. fehlt der Selbstschnitt. Wir haben daher die Torsallinien nicht, wie es gewöhnlich geschieht, dadurch definiert, daß sie „die Nachbarerzeugende schneiden", sondern um damit eine gestaltliche Eigenschaft zu verbinden durch die Vorzeichenänderung von ϑ. Analog ist ja in der Theorie der ebenen Kurven für die Definition der Wende-

punkte nicht der Umstand maßgebend, daß die Tangente von höherer als der ersten Ordnung berührt, sondern daß sie von gerader Ordnung berührt. Allerdings ist, wenn es sich nicht um metrische, sondern um projektive Eigenschaften algebraischer Gebilde handelt, die andere Definition vorzuziehen. Wir werden, um auch dieser Auffassung gerecht zu werden, den Namen „Kuspidallinie", der meist unterschiedslos wie Torsallinie gebraucht wird, hierfür vorbehalten, also eine Kuspidallinie einer Regelfläche dadurch definieren, daß für sie die Geschwindigkeitsvektoren ihrer Punkte anstatt ein hyperbolisches Paraboloid zu erfüllen, ein Büschel von parallelen Stäben bilden (§ 1), sei es, daß diese ungleich lang (Momentanzentrum im Endlichen, $\vartheta = 0$) oder gleich lang sind (Momentanzentrum im Unendlichen, $\omega = 0$). Die Ebene dieses Büschels (die Berührungsebene der Regelfläche längs der Kuspidallinie) heißt Kuspidalebene. Die Begriffe Torsallinie und Kuspidallinie fallen also in den vom projektiven Standpunkt gewöhnlichen Fällen zusammen, treten aber in besonderen Fällen auseinander. Es gehören nämlich alle Torsallinien und Wendeerzeugenden zu den Kuspidallinien, aber nicht umgekehrt. Das Momentanzentrum der Bewegung einer Kuspidallinie (im allgemeinen zugleich der Zentralpunkt) heißt auch Kuspidalpunkt. Wir haben in § 1 eine ausgezeichnete Bewegungsart bevorzugt. Bei einer beliebigen Bewegung kommt eine Verschiebungsgeschwindigkeit der Geraden in sich hinzu, wobei noch immer für eine Kuspidalerzeugende alle Geschwindigkeitsvektoren in einer Ebene (auf den Tangenten einer Parabel*)) liegen.

Wenn man die eine Hälfte der Umgebung einer gewöhnlichen singulären Erzeugenden an passenden Ebenen des zugehörigen Trieders spiegelt, so kann man sich dadurch (mit derselben Einschränkung wie bei den Raumkurven) ein angenähertes Bild von denjenigen Fällen verschaffen, wo mehrere Geschwindigkeiten zugleich durch Null gehen**).

Wenn neben einer Geschwindigkeit gleichzeitig ihre Ableitung verschwindet oder wenn mehrere von den vier

*) Schönflies, Geom. der Bewegung, S. 5.

**) Bei den Raumkurven konnten wir von der Umgebung eines regulären Punktes ausgehen; bei den Regelflächen ist die Umgebung einer regulären Erzeugenden hierzu nicht geeignet, weil in die Striktionslinie Ecken hineinkämen.

Geschwindigkeiten gleichzeitig durch Null gehen oder wenn es sich um die singulären Erzeugenden der besonderen Regelflächen handelt, wird man meistens die Gleichungen des § 8 ausnützen können. Wir geben dafür ein Beispiel, indem wir eine gewöhnliche orthoide Erzeugende e einer Regelfläche mit Richtebene betrachten. Für eine solche Fläche ist η immer, σ an der betreffenden Stelle gleich Null. Wenn wir die Bogenlänge der Striktionslinie als unabhängige Veränderliche wählen, so ist

$$W^2 = \sigma^2 + \vartheta^2 = 1\,, \quad \sigma\sigma' + \vartheta\vartheta' = 0\,.$$

Also folgt für e hieraus und aus (50a), (52a):

$$\vartheta = \pm 1\,, \quad \vartheta' = 0\,,$$

$$\varkappa_2 = \pm\sigma', \quad \sin\varepsilon = 0\,,$$

d. h. für eine solche Stelle berührt die Schmiegungsebene der Striktionslinie die Regelfläche.

Schließlich bemerken wir noch, daß man sich vom extremen Fall, wenn nämlich alle vier Geschwindigkeiten gleichzeitig ihr Vorzeichen ändern, so eine Vorstellung machen kann: Man denke sich ein und dasselbe Stück einer Regelfläche von einer Geraden doppelt beschrieben, indem man die letztere an einer Stelle umkehren läßt, und deformiere die zwei sich deckenden Mäntel stetig, so daß sie ein wenig auseinander treten. Es wäre ein analoger Vorgang, wenn man, um eine Schnabelspitze einer ebenen Kurve zu erhalten, zwei sich ursprünglich deckende Zweige einer Kurve mit einem Endpunkt durch stetige Deformation auseinander treten läßt.

---

§ 14. Schmiegungsregelschar und berührende Komplexe.

Wir haben in den letzten Paragraphen vorzugsweise die metrische Differentialgeometrie der Regelflächen behandelt und bringen nun noch einige Sätze aus deren projektiver Differentialgeometrie, die besonders von Voß (Math. Ann. Bd. 8) weit ausgebildet wurde.

Wir gehen von einer Analogie des Punktraums aus: Wenn wir auf einer Kurve $n+1$ Punkte wählen und durch diese eine Fläche F von bestimmter Art legen (sei es, daß

diese Fläche durch die Punkte völlig bestimmt ist oder nicht), dann die Punkte auf jener Kurve C in einen zusammenrücken lassen, so wird jede Grenzlage, welche F dabei annehmen kann, mit C eine Berührung $n$ter Ordnung eingehen. Analog legen wir durch $n+1$ benachbarte Strahlen $t_0, t_1, \ldots t_n$ einer Regelfläche $\mathfrak{R}$ alle möglichen linearen Komplexe; ihre Gesamtheit bildet ein $5-n$stufiges lineares System $\mathfrak{S}$, das beim Zusammenrücken der Strahlen nach t_0 im allgemeinen eine bestimmte Grenzlage $\mathfrak{S}_0$ annehmen wird. Wir sagen nun, jeder Komplex von $\mathfrak{S}_0$ berühre $\mathfrak{R}$ von der $n$ten Ordnung. Wir suchen das analytische Kennzeichen dafür, daß ein Komplex $\mathfrak{C}$ mit der Gleichung

$$\sum_1^6 a_{\lambda+3}\, x_\lambda = 0\,, \tag{89}$$

wobei die x Plückersche Zeiger sein mögen*) und eine Regelfläche $\mathfrak{R}$ mit den Zeigern $p_\lambda(t)$ sich längs eines Strahles t_0 von der $n$ten Ordnung berühren. Wir definieren ein System $\mathfrak{S}$ durch die $n+1$ Strahlen

$$p_\lambda(t+\nu h)\,, \qquad (\nu = 0, 1, \ldots n)\,.$$

Die Zeiger a eines Komplexes dieses Systems müssen dann die $n+1$ Gleichungen erfüllen

$$\Sigma a_{\lambda+3}\, p_\lambda(t_0+\nu h) = f(t_0+\nu h) = 0\,. \tag{90}$$

Nun ist (vgl. Hermite, Cours d'Analyse, 1873, S. 74 ff.):

$$\lim_{h=0} \frac{f(t_0+\nu h) - \binom{\nu}{1} f(t_0+\overline{\nu-1}\cdot h) + \ldots + (-1)^\nu f(t_0)}{h^\nu} = f^{(\nu)}(t_0)\,.$$

Läßt man also die $n+1$ Strahlen zusammenrücken, so muß jeder Komplex von $\mathfrak{S}_0$ neben

$$\Sigma a_{\lambda+3}\, p_\lambda(t_0) = 0 \tag{91}$$

noch die n Gleichungen $(\nu = 1, \ldots, n)$

$$\Sigma a_{\lambda+3}\, p_\lambda^{(\nu)}(t_0) = 0 \tag{92}$$

erfüllen. Faßt man nun die sechs Zahlen $p_\lambda^{(\nu)}$ für jedes ν als Zeiger eines Komplexes C_ν auf, wobei C_0 der Komplex

*) Für allgemeinere Zeiger ist die Rechnung ganz analog.

der Treffgeraden des Strahles t_0 selbst ist, so definieren $C_0, C_1, \ldots C_n$ ein $n+1$stufiges lineares Komplexgebiet $\mathfrak{T}_0$, und jedem Komplex von $\mathfrak{S}_0$ ist die Bedingung auferlegt, mit jedem von $\mathfrak{T}_0$ in Involution zu sein. $\mathfrak{S}_0$ ist also das ergänzende Gebiet von $\mathfrak{T}_0$ (Bd. I, § 78), kann daher auch aus dem ergänzenden Gebiet $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{S}$ durch Grenzübergang erhalten werden. Endlich sind nach Bd. I, Satz 174 die Träger der singulären Komplexe eines linearen Gebietes $\mathfrak{T}$ identisch mit den gemeinsamen Strahlen des ergänzenden Gebietes $\mathfrak{S}$. Wir erhalten also den

Satz 25: Definiert man durch $n+1$ benachbarte Strahlen einer Regelfläche $\mathfrak{R}$, indem man jeden als Träger eines Strahlengebüsches betrachtet, ein lineares Komplexgebiet $\mathfrak{T}$, sucht für das Zusammenrücken aller Strahlen nach t_0 die Grenzlage $\mathfrak{T}_0$ von $\mathfrak{T}$, so enthält das ergänzende Gebiet $\mathfrak{S}_0$ von $\mathfrak{T}_0$ die Gesamtheit der linearen Komplexe, welche $\mathfrak{R}$ längs t_0 (mindestens) in der $n$ten Ordnung berühren.

Dieser Satz gilt sogar, wenn der Rang der Matrix $p_\lambda^{(\nu)}(t_0)$ sich unter $n+1$ erniedrigt; nur ist dann die Stufe von $\mathfrak{T}_0$ niedriger als $n+1$ und demgemäß die Stufe von $\mathfrak{S}_0$ höher als $5-n$. Dann berühren alle linearen Komplexe, die in der $n-1$ten Ordnung berühren, zugleich von selbst in höherer Ordnung*). Wir verfolgen nun die Bedeutung des Satzes 25 in den einzelnen regulären Fällen, d. h. wenn die Matrix wirklich den Rang $n+1$ hat, schicken aber einige Definitionen voraus: Legt man durch zwei benachbarte Strahlen von $\mathfrak{R}$ und einen beliebigen dritten eine Regelfläche zweiter Ordnung und bildet den Grenzübergang, indem man die ersten zwei Strahlen nach t_0 zusammenfallen läßt, so erhält man eine längs t_0 „berührende Regelschar". Solcher gibt es ∞^3, unter ihnen ∞^2 Paraboloide, unter letzteren wieder die Leitschar des Paraboloids der Tangenten der Grenzschraubung (§ 1). Legt man durch drei benachbarte Strahlen von $\mathfrak{R}$ eine Regelschar zweiter Ordnung und bildet wie oben die Grenzlage, so heißt diese die

*) Analoge Vorkommnisse treten schon im Punktraum auf, z. B.: Wenn eine algebraische Raumkurve einen Wendepunkt hat, so berührt jede Ebene durch die Tangente des Wendepunktes die Kurve (mindestens) in zweiter Ordnung. Vgl. Scheffers, Theorie der Kurven, S. 169.

„Schmiegungsregelschar“ für den Strahl t_0, ihre Leitschar die „Haupttangentenschar“*) für t_0; beide zusammen liegen auf dem „Schmiegungshyperboloid“, das unter den berührenden Flächen zweiter Ordnung ausgezeichnet ist und in besonderen Fällen ein „Schmiegungsparaboloid“ sein oder in zwei Strahlbüschel zerfallen kann. Sucht man die beiden schneidenden Transversalen von vier benachbarten Strahlen und bildet wie oben den Grenzübergang, so erhält man die „Schmiegungsstrahlen“ oder „Schmiegungstangenten“ für t_0, die unter den Haupttangenten ausgezeichnet sind und $\mathfrak{R}$ in dritter Ordnung berühren.

Aus Satz 25 und der Diskussion der linearen Komplexgebiete in Bd. I, § 79 läßt sich nun leicht folgern: Für $n=1$ wird $\mathfrak{T}_0$ ein Komplexbüschel, dessen Träger im allgemeinen ein parabolisches Strahlennetz (zugleich die Gesamtheit der in Punkten von t_0 berührenden Tangenten von $\mathfrak{R}$) ist, das durch die Korrelation des Satzes 2 vollkommen definiert ist. Wenn jedoch t_0 eine torsale oder eine Wendeerzeugende ist (§ 13), überhaupt wenn ϑ oder ω verschwindet (§ 1), so besteht $\mathfrak{T}_0$ aus lauter singulären Komplexen. Ihre Träger bilden ein ebenes Strahlenbüschel $\mathfrak{B}$, dessen Scheitel, je nachdem ϑ oder ω verschwindet, der Zentralpunkt (Kuspidalpunkt) oder der unendlich ferne Punkt von t_0 ist. Die Ebene von $\mathfrak{B}$ ist die Berührungsebene von $\mathfrak{R}$ längs t_0. Die schlechthin längs t_0 berührenden linearen Komplexe bilden also das vierstufige zu $\mathfrak{T}_0$ ergänzende Gebiet und bestehen im besonderen Fall aus allen Komplexen, die das Büschel $\mathfrak{B}$ enthalten.

Für $n=2$ wird $\mathfrak{T}_0$ durch die Schmiegungsregelschar definiert, $\mathfrak{S}_0$ durch die Leitschar; jeder Komplex, welcher die erstere enthält, berührt $\mathfrak{R}$ längs t_0 in zweiter Ordnung. $\mathfrak{T}_0$ kann aber auch in allen speziellen Formen auftreten, die in Bd. I, § 79 für Komplexnetze erörtert wurden; nur der

*) In der Tat sind ihre Strahlen Haupttangenten im Sinne der Flächentheorie; denn faßt man einen bestimmten Punkt P auf t_0 auf, legt durch P den Strahl s, welcher zwei Nachbarstrahlen schneidet, so ergibt sich beim Grenzübergang eine Haupttangente in unserem Sinn, aber auch im Sinne der Flächentheorie, weil für jeden durch s gehenden Schnitt der Regelfläche die Grenzlage von s der Krümmungskreis in P wird, also die Krümmung in P Null ist. Die zweite durch P gehende Haupttangente ist t_0 selbst.

Fall der imaginären Grundregelschar ist bei einer reellen Erzeugenden t_0 ausgeschlossen. Für $n = 3$ definieren die beiden Schmiegungsstrahlen ein Strahlennetz, welches der Träger des Büschels der von der dritten Ordnung berührenden Komplexe ist. Endlich gibt es im allgemeinen für jeden Strahl t_0 einen einzigen von der vierten Ordnung berührenden linearen Komplex.

Die Gleichung des Schmiegungshyperboloides können wir nach der Regel des § 83 (Bd. I) hinschreiben:

$$(93)\qquad \begin{vmatrix} & -x_4 & x_3 & -x_1 & & \\ x_4 & & -x_2 & & -x_1 & \\ -x_3 & x_2 & \cdot & & & -x_1 \\ p_1 & p_2 & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & & p_6 \\ p_1' & p_2' & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & & p_6' \\ p_1'' & p_2'' & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & & p_6'' \end{vmatrix} = 0\,.$$

§ 15. Algebraische Regelflächen.

Jeder ebene Schnitt einer Regelfläche muß von allen Erzeugenden getroffen werden. Die ebenen Schnitte sind daher eindeutig punktweise durch die Erzeugenden aufeinander und auf die letzteren bezogen, also für algebraische Regelflächen von gleichem Geschlecht*). Man nennt das Geschlecht der ebenen Schnitte auch das Geschlecht der Regelfläche; insbesondere heißen die Regelflächen vom Geschlechte Null auch rational oder unikursal.

Unter dem Range einer beliebigen Fläche versteht man die Anzahl ihrer Tangenten, die in einem allgemein liegenden Strahlenbüschel enthalten sind; er ist also auch gleich der Klasse ihrer ebenen Schnitte (der Ordnung ihrer umschriebenen Kegel) und kann hieraus bei einer Regelfläche bestimmt werden, wenn deren Ordnung n und deren Geschlecht p bekannt sind. Z. B. folgt für die rationalen Regelflächen

*) Über den Begriff des Geschlechtes einer ebenen algebraischen Kurve vgl. Clebsch-Lindemann, Vorl. über Geom. I; übrigens werden die meisten der folgenden Erörterungen hiervon unabhängig sein.

aus der Grundformel (Clebsch-Lindemann, I, S. 351)*)

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d$$

wegen $p = 0$ als Zahl der Doppelpunkte der ebenen Schnitte

$$d = \binom{n-1}{2}.$$

Aus dem Zusammenhang zwischen Ordnung und Klasse einer ebenen Kurve (a. a. O. S. 343):

$$k = n(n-1) - 2d$$

ergibt sich daher als Rang der rationalen Regelflächen:

$$r = 2(n-1).$$

Die Klasse einer beliebigen windschiefen Regelfläche $\mathfrak{R}$ ist gleich ihrer Ordnung. Denn schneidet man sie mit einer Geraden g, so entspricht jedem Schnittpunkt S eine Berührungsebene durch g als Verbindungsebene mit der durch S gehenden Erzeugenden $\mathfrak{R}$. Wenn Ordnung und Klasse eines Gebildes gleich sind, verwendet man auch die gemeinsame Bezeichnung Grad.

Wir wollen eine Regelfläche $\mathfrak{R}$ betrachten, die durch drei algebraische Raumkurven C_1, C_2, C_3 von den Ordnungen m_1, m_2, m_3 als „Leitkurven" definiert ist, indem eine Gerade sich so bewegen soll, daß sie stets die drei Kurven schneidet**). $\mathfrak{R}$ ist auch der Schnitt der drei Komplexe von Treffgeraden, die den einzelnen Kurven zugehören, also (Bd. I, Satz 65):

Satz 26: Wenn die drei Leitkurven sich nirgends schneiden, so ist die Regelfläche vom Grade $2m_1m_2m_3$; jeder Schnittpunkt P von C_2 und C_3 erniedrigt den Grad um m_1.

Der letzte Teil des Satzes folgt daraus, daß sich der Kegel PC_1 absondert. Die Kurve C_1 ist eine $m_2m_3$fache

*) Wir schließen hierbei die ganz speziellen Regelflächen aus, bei denen jeder ebene Schnitt Rückkehrpunkte hat; dann können wir vom Auftreten solcher überhaupt absehen.

**) Jede Regelfläche kann so erhalten werden, indem man auf ihr drei Kurven zieht (z. B. drei ebene Schnitte) und sie als Leitkurven betrachtet. Allerdings wird die ursprünglich gegebene Fläche im allgemeinen nur ein Teil des gesamten Erzeugnisses dieser drei Leitkurven sein.

Linie von $\mathfrak{R}$, weil durch jeden ihrer Punkte die $m_2 m_3$ Erzeugenden gehen, in denen sich die Verbindungskegel mit den beiden anderen Kurven schneiden.

Wir wollen die auf C_1 liegenden Kuspidalpunkte bestimmen: Sei S_1 ein Schnittpunkt von C_1 mit der abwickelbaren Fläche $\mathfrak{A}$, die den Kurven C_2 und C_3 umschrieben werden kann*). Durch S_1 geht ein Strahl s von $\mathfrak{A}$, der auch C_2 und C_3 in S_2 und S_3 schneidet. In der Berührungsebene β von $\mathfrak{A}$ längs s liegen auch die Tangenten t_2 und t_3 von C_2 und C_3 in den Punkten S_2 und S_3. Bewegt man also die Gerade irgendwie auf $\mathfrak{R}$ durch die Lage s, so liegen die Geschwindigkeitsvektoren der Punkte S_2 und S_3 in β**). Also ist s eine Kuspidallinie, und S_1 muß der Kuspidalpunkt sein. Denn wäre ein von S_1 verschiedenes Momentanzentrum der Bewegung in β vorhanden, so hätte S_1 einen Geschwindigkeitsvektor in β, während sein Vektor nach der in der Anmerkung festgesetzten Art der Bewegung von vornherein doch nur in t_1 (Tangente von C_1) liegen kann oder Null sein muß. Ersteres ist unmöglich, wenn t_1 die Ebene β schneidet***).

Satz 27†): Durch jeden Schnittpunkt und jeden Berührungspunkt einer Leitkurve mit der abwickelbaren Fläche, die den beiden anderen umschrieben ist, geht eine Kuspidallinie der Regelfläche. Im ersteren Fall ist der Schnittpunkt zugleich der Kuspidalpunkt.

*) Wir können durch eine Tangente von C_2 eine Anzahl Ebenen legen, welche auch C_3 berühren. Jede derselben können wir auf beiden Kurven fortwälzen, wodurch der erwähnte Torsus entsteht.

**) Auch für die bewegte Gerade s bedeutet S_1, S_2, S_3 immer die Schnittpunkte mit C_1, C_2, C_3, und zwar denken wir uns die Bewegung so vollzogen, daß S_1 auf s fest bleibt; dann können S_2 und S_3 im allgemeinen auf s nicht fest bleiben, weil sich die Abstände von S_1 ändern, aber die Geschwindigkeit von S_2 setzt sich aus einer Komponente in t_2 und einer längs s zusammen, fällt also in β.

***) Dagegen versagt in der Tat der Schluß für einen Berührungspunkt von C_1 mit $\mathfrak{A}$. Hier erhalten wir zwar eine Kuspidallinie, aber der Kuspidalpunkt kann außerhalb C_1 fallen. Dies entgeht leicht, wenn man sich darauf beschränkt zu sagen: „durch S_1 gehen zwei unendlich nahe Erzeugende der Regelfläche". Deshalb war diese etwas längere Erörterung nicht überflüssig.

†) Ist der Natur der Sache nach auf nicht algebraische Regelflächen übertragbar.

Umgekehrt erhalten wir so alle Kuspidallinien von $\mathfrak{R}$. Denn die Geschwindigkeitsvektoren der drei Punkte S_1, S_2, S_3 liegen beziehungsweise in den drei Verbindungsebenen st_1, st_2, st_3. Höchstens einer von ihnen kann Null sein oder in s selbst hineinfallen. Mindestens zwei von diesen Verbindungsebenen müssen also für eine Kuspidallinie zusammenfallen.

Da eine Kuspidallinie in den gewöhnlichen Fällen zugleich Torsallinie ist, so wird im allgemeinen der Punkt S_1 während der Bewegung auf C_1 umkehren (vgl. § 13). Auf C_1 wird also die Umgebung eines Kuspidalpunktes durch diesen selbst in zwei Stücke geteilt; durch das eine Stück gehen im allgemeinen um zwei reelle Schalen mehr von $\mathfrak{R}$ hindurch als durch das andere. Eventuell können Teile der Leitkurven „isolierte mehrfache Linien" von $\mathfrak{R}$ sein, durch deren Punkte gar keine reellen Erzeugenden gehen.

Wenn eine der Kurven C_2, C_3, z. B. C_2 eine Gerade ist, kann man von einer umschriebenen abwickelbaren Fläche nicht mehr reden. Aber gerade in diesem Fall liegt die Sache unmittelbar sehr anschaulich: Dreht man eine Ebene ε um C_2 und verbindet ihre Schnittpunkte S_1 und S_3 auf C_1 und C_3, so erhält man Erzeugende von $\mathfrak{R}$. Durchschreitet S_3 einen Berührungspunkt zwischen C_3 und ε, so ändert sich dabei der Drehungssinn von ε. Es wird also der Schnittpunkt S_1 auf C_1 umkehren, und wir gelangen zu einer Torsallinie.

Es sei erwähnt, daß eine Regelfläche auch durch bloß zwei Leitkurven, von denen die eine zweimal geschnitten werden soll, definiert werden kann, endlich auch durch die Trisekanten einer einzigen Kurve.

Eine algebraische Regelfläche $\mathfrak{R}$ von höherer als der zweiten Ordnung muß (eine oder mehrere) Doppellinien besitzen: Denken wir uns zuerst eine windschiefe Fläche $n$ter Ordnung und legen durch eine Erzeugende e eine Ebene ε, so ist der Restschnitt S von der Ordnung $n-1$; er schneide e in den Punkten $P_1, \ldots P_{n-1}$. Bewegen wir die Punkte $Q_1, \ldots Q_{n-1}$ auf S so, daß sie in die Grenzlagen $P_1, \ldots P_{n-1}$ einrücken, so werden auch die durch $Q_1, \ldots$ gehenden Erzeugenden in bestimmte Grenzlagen $e_1, \ldots e_{n-1}$ einrücken. Nur eine davon (außer wenn e eine mehrfache Erzeugende wäre) fällt mit e selbst zusammen,

nämlich diejenige, deren Punkt Q in den Berührungspunkt von ε mit $\mathfrak{R}$ einrückt. Es sei dies etwa e_{n-1}. Dann sind $P_1, \ldots P_{n-2}$ Doppelpunkte von $\mathfrak{R}$, die auch bei Drehung von ε um e fest bleiben, während P_{n-1} nach Satz 2 eine zu ε projektive Reihe beschreibt. Bewegt man e selbst, so beschreiben $P_1, \ldots P_{n-2}$ Doppelkurven. Es ist natürlich nicht ausgeschlossen, daß von diesen Punkten stets mehrere zusammenfallen und so zur Entstehung mehrfacher Kurven führen.

Satz 28: Jede Erzeugende einer windschiefen algebraischen Fläche $n$ter Ordnung wird von der Doppelkurve in $n-2$ Punkten geschnitten.

Für die abwickelbaren Regelflächen erfahren die obigen Schlüsse nur geringe Modifikationen. Eine Anzahl Schnittpunkte von e mit $\mathfrak{R}$ fallen stets in den Berührungspunkt mit der Gratlinie hinein. In der Tat ist diese eine Doppellinie von $\mathfrak{R}$, und wir fragen, wie oft eine Erzeugende e von den übrigen Doppellinien geschnitten wird. Da von den $n-2$ Punkten des Satzes 28 zwei durch den Berührungspunkt B mit der Gratlinie absorbiert werden, bleiben $n-4$ übrig. Von den $n-1$ Schnittpunkten zwischen e und S fallen also im allgemeinen drei nach B. Wenn aber ε die Schmiegungsebene der Gratlinie ist, so ist e als Bestandteil der Schnittlinie mit $\mathfrak{R}$ doppelt zu zählen. Der Restschnitt ist noch von der Ordnung $n-2$, und von seinen Schnittpunkten mit e fallen nur mehr zwei nach B.

Satz 29: Legt man durch einen regulären Punkt B der Gratlinie $\mathfrak{G}$ einer abwickelbaren Regelfläche $\mathfrak{R}$ $n$ter Ordnung eine allgemein liegende Ebene, so hat die Schnittkurve in B eine Spitze*); gehört jedoch die Ebene dem Büschel der Berührungsebenen von $\mathfrak{G}$ an, so hat der Restschnitt $n-1$ter Ordnung in B einen Wendepunkt, außer für die Schmiegungsebene, wo der Restschnitt $n-2$ter Ordnung e in B einfach berührt. Jede Erzeugende wird von den außer der Gratlinie vorhandenen Doppelkurven $n-4$mal geschnitten.

*) Dieser erste Teil des Satzes ist aus der allgemeinen Theorie der Raumkurven bekannt; auch der mittlere Teil kann außer den Anzahlbeziehungen auf nicht algebraische abwickelbare Flächen übertragen werden.

Wegen der Doppelkurve, die auf den ebenen Schnitten Doppelpunkte hervorruft, kann eine Regelfläche $n$ter Ordnung (abgesehen vom trivialen Fall der Kegelflächen) nicht das Maximalgeschlecht der ebenen Kurven $n$ter Ordnung erreichen; ja es kann auch das Maximalgeschlecht der ebenen Kurven $n-1$ter Ordnung nicht überschritten werden, weil die Restschnitte der durch eine Erzeugende gelegten Ebenen von der $n-1$ten Ordnung sind. Z. B.:

Satz 30: Die Regelflächen vierter Ordnung sind entweder vom Geschlechte Null oder eins.

Flächen von letzterer Art erhält man, wenn man zwei windschiefe Gerade und einen diese nicht schneidenden Kegelschnitt als Leitkurven wählt. Die beiden Geraden sind nach Satz 28 die einzigen Doppellinien und erzeugen daher auf den ebenen Schnitten zwei Doppelpunkte.

Wenn die sechs Linienzeiger p_i als ganze Funktionen $n$ter Ordnung eines Parameters t gegeben sind

$$\varrho p_i = a_{i0} + a_{i1} t + \ldots + a_{in} t^n \qquad (i = 1, \ldots 6), \tag{94}$$

wobei

$$\Sigma p_i p_{i+3} = 0$$

identisch erfüllt sein soll, so ist dadurch eine rationale Regelfläche definiert, deren Ordnung n beträgt. Denn die Inzidenzbedingung mit einer gegebenen Geraden q:

$$\Sigma p_i q_{i+3} = 0$$

führt auf eine Gleichung $n$ter Ordnung. Umgekehrt kann eine rationale Regelfläche stets in der Form (94) dargestellt werden. Denn man kann die homogenen Zeiger der Punkte zweier ebenen Schnittkurven als ganze rationale Funktionen eines Parameters darstellen und aus diesen Funktionen die Linienzeiger zusammenstellen, wobei die durch eine Erzeugende zugeordneten Punkte beider Kurven demselben Parameterwert entsprechen müssen. Der Grad der rationalen Funktionen wird dabei formal allerdings höher als n, muß sich aber durch Absonderung gemeinsamer Faktoren auf n reduzieren lassen, weil eben die gegebene Fläche bloß von $n$ter Ordnung ist. Von dieser Darstellung aus hat Voß eine liniengeometrische Theorie der rationalen Regelflächen entwickelt (Math. Ann. Bd. 8, „Zur Theorie der windschiefen Flächen", Art. XI ff.), aus der wir noch einen besonders einfachen Satz bringen:

Satz 31: Jede rationale Regelfläche vierter Ordnung ist in einem linearen Komplex enthalten.

Denn ist die Fläche in der Darstellung

$$\varrho p_i = \sum_{\lambda=0}^{4} a_{i\lambda} t^{\lambda} \qquad (i = 1, \ldots 6) \tag{95}$$

gegeben, so kann man die Verhältnisse von sechs Zahlen b_i aus den Bedingungen

$$\sum_{i=1}^{6} a_{i\lambda} b_i = 0 \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots 4)$$

bestimmen, worauf die Gleichung

$$\Sigma b_i p_i = 0$$

identisch erfüllt ist. Sinkt aber der Rang der Matrix der a auf vier herab, so ist die betreffende Regelfläche in einem Strahlennetz enthalten.

---

§ 16. Die abwickelbaren Flächen vierter Ordnung.

Wir suchen die Gleichung der Tangentenfläche einer kubischen Raumkurve C. Die Zeiger der Punkte sowohl als der Schmiegungsebenen von C lassen sich als rationale Funktionen dritten Grades eines Parameters t darstellen und zwar in homogenen Zeigern als ganze Funktionen. Seien also u_i die Zeiger einer Schmiegungsebene, so läßt sich durch

$$\sigma u_i = \sum_{\lambda=0}^{3} a_{i\lambda} t^{\lambda} \qquad (i = 1, \ldots 4)$$

die Gesamtheit der Schmiegungsebenen (das „Ebenenbüschel dritter Ordnung") darstellen (Clebsch-Lindemann II, S. 246). Die Gleichung $\Sigma u_i x_i = 0$ einer solchen läßt sich daher auf die Form

$$b_0 t^3 + 3 b_1 t^2 + 3 b_2 t + b_3 = 0 \tag{96}$$

bringen, wobei die b lineare Funktionen der x sind. Durch einen beliebigen Punkt P des Raumes gehen, wie es sein muß, drei Schmiegungsebenen. Rückt P in eine Lage, wo

zwei von diesen zusammenfallen, so wird die Grenzlage ihrer Schnittlinie zur Tangente von C, und P gehört dann der Tangentenfläche $\mathfrak{R}$ von C an. Um die Gleichung von $\mathfrak{R}$ zu finden, haben wir also nur die Bedingung aufzuschreiben, daß die Gleichung (96) eine Doppelwurzel besitzt, d. h. ihre Diskriminante Null zu setzen (Baltzer, Determinanten, § 11, 21):

$$(97) \qquad (b_0 b_3 - b_1 b_2)^2 - 4(b_1^2 - b_0 b_2)(b_2^2 - b_1 b_3) = 0 ,$$

und dies ist eine Gleichung vierten Grades in den x.

Hat umgekehrt eine abwickelbare Fläche die Ordnung vier, so besitzt sie nach Satz 29 außer ihrer Gratlinie keine Doppelkurve. Bei ihren ebenen Schnitten treten also nur in den Schnittpunkten mit der Gratlinie Spitzen, dagegen Doppelpunkte überhaupt nicht auf. Andererseits muß nach Satz 30 jeder ebene Schnitt einer beliebigen Regelfläche vierter Ordnung drei oder zwei Doppelpunkte oder Spitzen besitzen. Aber eine Gratlinie zweiter Ordnung führt zu keiner abwickelbaren Fläche; also bleibt nur der Fall der Gratlinie dritter Ordnung.

Satz 32: Die Tangentenflächen der kubischen Raumkurven sind die einzigen abwickelbaren Flächen vierter Ordnung. Sie sind rational und werden von einer gewöhnlichen Berührungsebene der Gratlinie in einer Kurve dritter Ordnung geschnitten, die im Berührungspunkt ihren einzigen reellen Wendepunkt, im Schnittpunkt mit der Gratlinie ihre Spitze hat, von einer Schmiegungsebene jedoch in einem Kegelschnitt.

Der letzte Teil des Satzes folgt aus Satz 29. Man kann unmittelbar bestätigen, daß die abwickelbare Fläche vierter Ordnung außer der Gratlinie keine Doppelkurve hat. Denn durch einen Doppelpunkt müßten zwei Tangenten an die kubische Raumkurve gehen, was unmöglich ist, da ihre Berührungspunkte vier Schnittpunkten der Verbindungsebene gleichwertig wären.

Die abwickelbaren Flächen bis einschließlich zur siebenten Ordnung hat Schwarz im 64. Bande des Journ. f. Math. (De superficiebus etc.) untersucht.

§ 17. Die Regelflächen dritter Ordnung.

Wir schicken einen Hilfssatz über die projektive Beziehung eines Kegelschnittes k und einer geraden Punktreihe g voraus. Diese Beziehung ist dadurch definiert, daß jedes Quadrupel auf k dasselbe Doppelverhältnis (gemessen durch das Strahlenquadrupel aus einem beliebigen fünften Punkte von k) haben soll wie das entsprechende Quadrupel auf g. Der Kegelschnitt sei definiert durch zwei projektive Büschel u, v, w und u', v', w' (Fig. 4). Den Punkten U, V, W

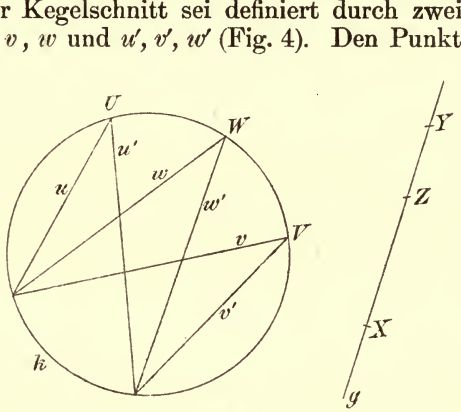

Fig 4.

mögen auf g die Punkte X, Y, Z entsprechen. Das Zeigersystem sei so gelegt, daß k in der Zeigerebene $x_4 = 0$ liegt. Wenn dann

$$(98) \qquad u \equiv \sum_1^3 u_i \xi_i = 0\,, \qquad v \equiv \sum_1^3 v_i \xi_i = 0$$

usw. die Gleichungen der sechs Strahlen $u, \ldots w'$ sind, so lassen sich diese Gleichungen so schreiben, daß

$$w \equiv u + \lambda v\,, \quad w' \equiv u' + \lambda v'\,.$$

Gleichzeitig lassen sich die Zeiger x_i, y_i, z_i von X, Y, Z so schreiben (vgl. das Verfahren in Bd. I, § 62), daß

$$(99) \qquad z_i = x_i + \lambda y_i \qquad (i = 1, \ldots 4)\,.$$

Berechnen wir nun aus

$$u + \lambda v = 0\,, \quad u' + \lambda v' = 0$$

nach Einführung von (98) die ξ_i (die Zeiger von W), so erhalten wir ganze quadratische Funktionen von λ in der Form

$$(100) \qquad \xi_4 = 0\,, \quad \varrho\,\xi_i = a_i + b_i\lambda + c_i\lambda^2 \qquad (i = 1\,,\ 2\,,\ 3)\,,$$

wobei die a, b, c gegebene Größen sind.

Satz 33: Wenn ein Kegelschnitt k und eine gegerade Punktreihe g projektiv aufeinander bezogen sind, so lassen sich die homogenen Zeiger eines Punktes von k als ganze quadratische, die eines Punktes von g als ganze lineare Funktionen eines Parameters λ so darstellen, daß entsprechenden Punkten derselbe Parameterwert zugehört.

Verbindet man nun jeden Punkt W mit dem entsprechenden Z, so folgt aus der Form der $p_{ik} = \xi_i z_k - \xi_k z_i$ unmittelbar (§ 15):

Satz 34: Ein Kegelschnitt k und eine hierzu projektive gerade Punktreihe g erzeugen eine Regelfläche dritter Ordnung.

Wenn insbesondere k und g sich schneiden, heißt die Fläche eine Cayleysche Fläche, sonst eine allgemeine*) Regelfläche dritter Ordnung. Nur setzen wir im ersteren Fall voraus, daß der Schnittpunkt nicht entsprechend gemein sei, weil sonst, wenn etwa dieser Punkt dem Parameterwert Null entspricht, die x_i mit den a_i identisch werden, sich daher der Faktor λ aus sämtlichen p_{ik} absondert und die Fläche nur vom zweiten Grad wird.

Alle Regelflächen dritter Ordnung sind rational, weil die durch eine Erzeugende gelegten Ebenen Kegelschnitte als Restschnitte besitzen. Die übrigen ebenen Schnitte sind also Kurven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt oder einer Spitze. Daher schneidet die Doppelkurve jede Ebene in einem einzigen Punkte und es folgt (vgl. auch Satz 28):

Satz 35: Die Doppellinie einer Regelfläche dritter Ordnung ist eine Gerade; sie wird von jeder Erzeugenden geschnitten. Es gibt keine abwickelbaren Flächen dritter Ordnung.

Denn die Gratlinie einer solchen wäre die Doppellinie, müßte also eine Gerade sein. Ebenso wie den Satz 31 erhält man den

*) Wir werden nämlich bald sehen, daß umgekehrt jede Regelfläche dritter Ordnung nach Art des Satzes 34 erhalten werden kann.

Satz 36: Jede Regelfläche $\mathfrak{R}$ dritter Ordnung ist in einem Büschel linearer Komplexe, also in einem Strahlennetz enthalten.

Bei reellen Flächen (und jede Gleichung dritter Ordnung mit reellen Koeffizienten stellt auch ein reelles Gebilde dar) kann dieses Netz wegen des Vorhandenseins der Doppelgeraden nur hyperbolisch oder parabolisch sein; die Doppellinie ist eine Brennlinie des Netzes. Der Satz 36 ergibt sich für hyperbolische Netze noch auf eine andere Art: Wenn wir vier Erzeugende von $\mathfrak{R}$ herausheben und die gemeinsamen Transversalen t_1, t_2 suchen, so müssen sie ganz auf $\mathfrak{R}$ liegen, weil sie mehr als drei Punkte mit $\mathfrak{R}$ gemein haben. Diese Transversalen müssen für jedes Quadrupel dieselben sein; denn halten wir drei Erzeugende fest und bewegen die vierte, so könnten sich die Transversalen nur auf einer Regelschar verschieben und $\mathfrak{R}$ müßte zerfallen. Es ist nicht ausgeschlossen, daß die beiden Transversalen zusammenfallen; dann muß das nach Satz 36 vorhandene Netz parabolisch sein, und es ist leicht zu sehen, daß dieser Fall bei der Cayleyschen Fläche wirklich eintritt, indem k aus g durch ein Ebenenbüschel projiziert wird, das auf g selbst projektiv bezogen ist, wie es auch beim parabolischen Netz der Fall ist. Also ist jede Cayleysche Fläche in einem parabolischen Netz enthalten, aber auch umgekehrt: Wenn eine Regelfläche dritter Ordnung in einem parabolischen Netz enthalten ist, so muß die Brennlinie des Netzes die Doppellinie d der Fläche sein, und die Reihe der Schnittpunkte der Erzeugenden mit d ist projektiv auf das Büschel der Verbindungsebenen mit d bezogen. Legen wir daher durch eine Erzeugende eine Ebene, so ist auch der Restschnitt durch das Ebenenbüschel projektiv auf d bezogen, und wir gelangen zur Erzeugung des Satzes 34.

Für den Fall des hyperbolischen Netzes legen wir durch eine Erzeugende eine Ebene und können den Kegelschnitt k, den wir als Restschnitt erhalten, als dritte Leitkurve zu den Brennlinien d und l des Netzes, von denen d die Doppellinie sein möge, hinzunehmen; k und d müssen sich schneiden (vgl. den Beweis des Satzes 28). Also definieren diese drei Leitkurven in der Tat nach Satz 26 eine Regelfläche dritter Ordnung. In jeder Ebene ε durch d liegt eine einzige Erzeugende, die man erhält, wenn man die

Schnittpunkte ε, k und ε, l verbindet. Andererseits sind k und l durch das Ebenenbüschel ε projektiv aufeinander bezogen, so daß auch für die allgemeinen Regelflächen dritter Ordnung die Umkehrung des Satzes 34 bewiesen ist.

Sei S der Schnittpunkt der Ebene k mit l. Um dann zwei Strahlen von $\mathfrak{R}$ zu finden, die in derselben Ebene E durch l liegen, ziehe man (Fig. 5) durch S einen Strahl a, welcher k in S_1, S_2 schneidet und verbinde diese Punkte mit dem Schnittpunkt $T \equiv (E, d)$. Man sieht, daß jede Ebene durch l eine Doppeltangentialebene ist. Ferner definiert das Büschel S auf k eine Involution, die aus d durch eine Ebeneninvolution projiziert wird; also:

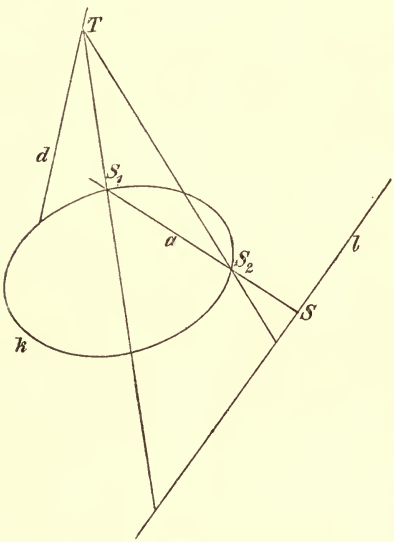

Fig. 5.

Satz 37: Verbindet man je zwei Erzeugende, die durch denselben Punkt der Doppellinie gehen, mit dieser durch Ebenen, so erhält man die Paare eines involutorischen Ebenenbüschels. Dual ist auf l eine Punktinvolution definiert.

Weder d noch l sind Erzeugende der allgemeinen Regelfläche. Dagegen ist bei der Cayleyschen Fläche die Doppellinie zugleich eine Erzeugende, und zwar Kuspidalerzeugende.

Legt man durch S die Tangenten an k, so gehen durch die Berührungspunkte die beiden Kuspidalerzeugenden der allgemeinen Fläche; sie sind daher reell oder nicht, je nachdem S außerhalb oder innerhalb k liegt.

Wir kennen schon eine Regelfläche dritter Ordnung genauer: Das Zylindroid (Bd. I, § 75). Es kann so gekennzeichnet werden: 1) Die einfache Leitlinie ist die unendlich ferne Gerade, 2) auf deren Stellung steht die Doppel-

linie senkrecht, 3) die erwähnte Ebeneninvolution besteht aus zwei symmetrischen Ebenenbüscheln. Nun kann man von einer allgemeinen Regelfläche mit zwei reellen Kuspidallinien ausgehend stets durch eine reelle Kollineation diese drei Eigenschaften erreichen. Wir wollen jetzt auch für den Fall imaginärer Kuspidallinien eine besonders einfache Normalform der Regelfläche suchen, aus der sich alle anderen durch eine reelle Kollineation ableiten lassen: Wir brauchen hierzu bloß an Stelle der Eigenschaft 3) zu setzen: Die Ebeneninvolution soll eine rechtwinklige sein, mit anderen Worten: Wir wollen einen rechten Winkel so bewegen, daß sein Scheitel die Z-Achse beschreibt, seine Ebene parallel zur XY-Ebene bleibt. Die Richtung des einen Schenkels ist dann durch den Winkel α mit der XZ-Ebene bestimmt. Setzen wir

$$\operatorname{tg}\alpha = a\,,$$

so ist nur noch die Abhängigkeit zwischen a und dem Zeiger z des Scheitels so zu bestimmen, daß eine Fläche dritter Ordnung entsteht. Die Gleichungen der beiden Schenkel des rechten Winkels lassen sich schreiben:

$$z = \text{const.}, \qquad \frac{a}{1-a^2}(x^2 - y^2) = xy\,.$$

Die letztere wird nur dann eine Gleichung dritten Grades, wenn wir als jene Abhängigkeit festsetzen:

$$\frac{a}{1-a^2} = z \quad \text{oder} \quad = \frac{1}{z}\,. \tag{101}$$

Es genügt natürlich eine der beiden Annahmen, da ihre Ergebnisse selbst durch eine involutorische perspektive Kollineation mit unendlich fernem Zentrum ineinander übergeführt werden können. Aus der Gleichung (101) könnte man leicht eine Anzahl Erzeugender konstruieren und sich eine anschauliche Vorstellung der Fläche bilden. Sie hat (für $\alpha = 45^0$ und 135^0) zwei unendlich ferne Erzeugende und besteht aus zwei kongruenten Schalen, die sich in der Doppellinie schneiden.

Um endlich auch für die Cayleysche Fläche eine einfache Normalform zu erhalten, verlegen wir die Doppellinie in die unendlich ferne Gerade der XY-Ebene und können die Punktreihe auf ihr durch das Strahlenbüschel $y:x = a$

in der XY-Ebene darstellen. Den Richtungen $a = 0, \infty$ sollen im Parallelebenenbüschel $z = c$ beziehungsweise die Ebenen $z = 0, \infty$ entsprechen. Dann kann (vgl. die Ableitung der Gleichung (66) in Bd. I, § 53) durch

$$a = cz \tag{102}$$

die Korrelation dargestellt werden, deren Träger die unendlich ferne Doppellinie ist. Wir können durch eine spezielle Affinität die Konstante c auf eins bringen und haben zur vollständigen Bestimmung der Fläche nur noch durch einen beliebigen Punkt der unendlich fernen Geraden, z. B. durch den unendlich fernen Punkt der X-Achse, in einer willkürlichen durch diesen Punkt gehenden Ebene, z. B. der XZ-Ebene, einen Kegelschnitt als Leitkurve zu wählen. Wir können annehmen (was nur von der Wahl des Zeigersystems abhängt), der Ursprung sei der Scheitel dieser Parabel und können ferner durch eine spezielle Affinität ihre Gleichung immer auf die einfachste Form

$$x = z^2$$

bringen. Durch jeden Punkt dieser Parabel haben wir nun parallel zur XY-Ebene eine Gerade zu legen, deren Richtung durch (102) bestimmt ist. Also ist

$$y = xz - z^3$$

die Gleichung der Fläche.

Satz 38: Jede reelle Regelfläche dritter Ordnung (abgesehen von den Kegelflächen) läßt sich durch eine reelle Kollineation aus einer der drei Formen

$$(x^2 + y^2)z = xy \quad \text{(Zylindroid)}, \tag{103}$$

$$(x^2 - y^2)z = xy \tag{104}$$

$$y = xz - z^3 \quad \text{(spezielle Cayleysche Fläche)} \tag{105}$$

ableiten.

Zahlreiche Sätze über Regelflächen dritter Ordnung findet man bei Weyr, Geom. der räuml. Erzeugnisse ein-zwei-deutiger Gebilde, insbesondere der Regelflächen dritter Ordnung. Auch die Regelflächen vierter Ordnung wurden schon von Cayley und Cremona untersucht (Sturm, Liniengeom. I, S. 52—61).

Übungsaufgaben:

1. Die Zeiger der Zentralnormale einer Regelfläche $\mathfrak{R}$ sind zu berechnen, wenn $\mathfrak{R}$ durch die Darstellung (5) gegeben ist.

2. Die Formeln der § 2 und 5 gestatten mannigfache Kontrollen, z. B. bestätige man, α) daß Zentraltangente und Zentralpunkt die Inzidenzbedingungen erfüllen, β) daß die Striktionslinie zur Zentralnormale senkrecht steht.

3. Eine Raumkurve berühre in einem bestimmten Punkte P (mit der Tangente T) ihre Schmiegungsebene von der n-ten Ordnung; von welcher Ordnung verschwindet der Abstand zwischen T und den Nachbartangenten?

4. Die Krümmung der Striktionslinie muß davon unabhängig sein, mit welcher Geschwindigkeit man die Regelfläche durchläuft und wenn man alle vier Geschwindigkeiten mit einem Faktor multipliziert, so multiplizieren sich auch die Ableitungen mit demselben Faktor. Man könnte daher vielleicht erwarten, daß die Formeln (50) und (51) für $\varkappa_2$ homogen von der nullten Dimension sein müssen; dies ist aber nicht der Fall. Wie erklärt sich dies?

5. Wie hängt bei den Sätzen 13 und 15 der Öffnungswinkel 2α des Umdrehungskegels von ζ ab?

6. Wenn man bei den Regelflächen mit ebener geodätischer Striktionslinie (§ 9) auch noch $\varkappa_2$ Null werden läßt, so folgt aus (65) und (66), daß ω und η Null werden, d. h. wir kommen zum trivialen Fall des Parallelstrahlenbüschels und man könnte glauben, daß es keine windschiefen Regelflächen mit gerader Striktionslinie gibt. Dem widerspricht aber schon die Existenz der „schraubenartigen“ Regelflächen ($\sigma = \eta = 0$; ϑ und ω von Null verschieden), die offenbar eine gerade Striktionslinie haben. Wie klärt sich dies auf?

7. Es ist ein Punkt Ξ, H, Z der Gratlinie der rektifizierenden Fläche einer Regelfläche zu suchen.

8. Man bewegt eine Ebene E so, daß sie stets asymptotische Ebene einer Regelfläche bleibt, die durch eine in E festliegende Gerade beschrieben werden soll. Welcher Art ist die Bewegung der Ebene?

9. Man bestätige die Gleichungen (87) aus der Theorie des Nullsystems.

10. Wenn man eine Regelfläche durch ein Parallelebenenbüschel schneidet, so bilden die in den Punkten einer Erzeugenden gelegten Tangenten der Schnittkurven ein hyperbolisches Paraboloid.

11. Die Zeiger der beiden Schmiegungstangenten einer Erzeugenden einer Regelfläche sind zu berechnen.

12. Welche Beziehungen müssen die Koeffizienten a in den Gleichungen (95) erfüllen, damit diese wirklich eine Regelfläche darstellt?

13. Die Fläche (104) ist dadurch anschaulich zu machen, daß man (analog wie beim Zylindroid, Bd. I, § 75) mit einem Kreiszylinder schneidet, dessen Achse in die Doppellinie fällt und dann den Zylinder in eine Ebene ausbreitet.

14. An Stelle der Normalformen (103) und (104) des Satzes 38 sind solche herzustellen, bei denen die Doppellinie unendlich fern ist.

15. Eine allgemeine Regelfläche dritter Ordnung ist durch ihre Doppellinie, ihre einfache Leitlinie und fünf Erzeugende bestimmt.

16. Die Untersuchungen des § 17 sind ins duale Gebiet zu übertragen.

II. Abschnitt.

Differentialgeometrie der Strahlenkongruenzen.

§ 18. Natürliche Linienzeiger.

Dem eigentlichen Gegenstande dieses Abschnittes seien zwei Paragraphen vorausgeschickt, die einige auch sonst in der Liniengeometrie nützliche Hilfsmittel bringen sollen. Bei gewissen Untersuchungen der differentiellen Liniengeometrie ist das folgende Zeigersystem verwendbar, das wir wegen seines ganz elementaren Charakters ein natürliches Zeigersystem nennen wollen:

Wir wählen einen Strahl Z mit einer bestimmten positiven Richtung als „Achse“ des Systems, auf ihm einen Punkt O als „Ursprung“ und durch O einen Halbstrahl $X \perp Z$ (Fig. 6), von dem aus wir die Winkel in der zu Z senkrechten Stellung zählen; die Ebene XZ heiße „Ausgangsebene“. Irgend einen Strahl s des Raumes bestimmen wir nun durch seinen kürzesten Abstand $a = AS$ von Z (A liegt auf Z, S auf s), durch seinen Winkel ω mit Z, durch den Winkel $(X, a) = \alpha$, endlich durch die Strecke $OA = z$. Auch für α ist durch die positive Richtung von Z ein bestimmter Drehungssinn festgelegt (Bd. I, S. 24), in welchem α entweder von Null bis 2π zu zählen ist (worauf a stets als positiv angesehen werden kann) oder von Null bis π (worauf für a positive und negative Werte zuzulassen sind. Wir werden die erstere Wahl treffen*). Durch AS als

*) Dies gilt für die Umgebung einer bestimmten Stelle; im weiteren Verlauf kann man durch die stetige Änderung gezwungen werden, alle Veränderlichen als unbeschränkt zu betrachten.

positive Richtung ist in der Stellung (Z, s) ein positiver Drehungssinn für ω fixiert. Wählt man z. B. jene Richtung von s als positive, welche mit Z einen absolut spitzen Winkel bildet, so ist ω von $-\frac{\pi}{2}$ bis $\frac{\pi}{2}$ zu zählen und positiv, falls s gegen Z links gewunden ist (Bd. I, S. 4). Für die Strahlen s, welche Z schneiden, wird $a = 0$, aber so, daß die gemeinsame Normale von Z und s zur Bestimmung des Winkels α maßgebend bleibt.

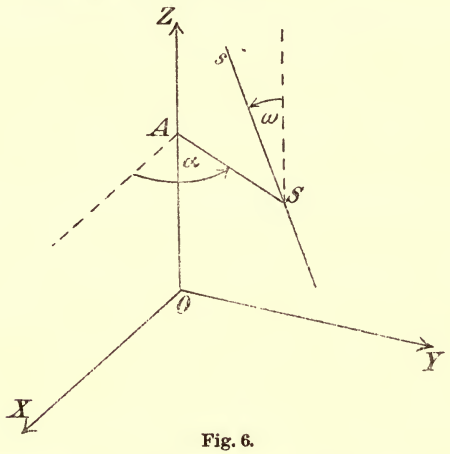

Fig. 6.

Wir betrachten in Verbindung mit diesem natürlichen Zeigersystem ein rechtwinkliges System, dessen X- und Z-Achse beziehungsweise nach X und Z fallen sollen, und wollen den Zusammenhang zwischen den „natürlichen Zeigern" a, α, z, ω und den rechtwinkligen Zeigern q_i desselben Strahles s ermitteln, wobei wir die letzteren als Normalzeiger (Bd. I, § 33) geschrieben denken. Dann ist:

$$q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1\,, \tag{1}$$

$$q_1 q_4 + q_2 q_5 + q_3 q_6 = 0\,. \tag{2}$$

Wir können von den Zeigern p der Achse $p_3 = 1$, alle übrigen p_i gleich Null setzen. Hiermit wird nach Bd. I, § 37 der Reihe nach*):

*) Für die zweite Gleichung (3) s. auch Bd. I, § 12.

$$p = q = 1 .$$

(3) $$\cos\omega = q_3 , \quad q_6 = -a\sin\omega .$$

(4) $$a = -\frac{q_6}{w} ,$$

wobei $$w^2 = q_1^2 + q_2^2 = 1 - q_3^2 = \sin^2\omega$$

und das Vorzeichen von

(5) $$\sin\omega = w$$

dem von q_6 entgegengesetzt ist.

(6) $$P = 0 , \quad Q = q_1 q_5 - q_2 q_4 .$$

Die Zeiger des kürzesten Abstands a werden:

(7) $$\begin{cases} d_1 = \frac{q_2 q_6}{w^2} , & d_2 = -\frac{q_1 q_6}{w^2} , & d_3 = 0 , \\ d_4 = \frac{q_1 q_6}{w^4} Q , & d_5 = \frac{q_2 q_6}{w^4} Q , & d_6 = 0 , \end{cases}$$

also weil stets $d_1 = a\cos\alpha$ ist:

(8) $$\cos\alpha = -\frac{q_2}{w} , \qquad \sin\alpha = \frac{q_1}{w} .$$

Zur Berechnung von z sind unmittelbar die beiden mittleren Gleichungen (40) des § 38 (Bd. I) dienlich, wenn man dort die d_i statt der p_i und $1, x, y, z$ statt x_1, x_2, x_3, x_4 einsetzt:

(9) $$z = -\frac{d_4}{d_2} = \frac{d_5}{d_1} = \frac{Q}{w^2} .$$

Aus (2) und (3) erhält man:

$$q_1 q_4 + q_2 q_5 = a\sin\omega\cos\omega ,$$

aus (6) und (9):

$$q_1 q_5 - q_2 q_4 = z\sin^2\omega .$$

Setzt man hierin für q_1 und q_2 aus (8) die Werte, so kann man die Ausdrücke für alle Größen q durch die natürlichen Zeiger zusammenstellen:

(10) $$\begin{cases} q_1 = \sin\omega\sin\alpha , & q_4 = z\sin\omega\cos\alpha + a\cos\omega\sin\alpha , \\ q_2 = -\sin\omega\cos\alpha , & q_5 = z\sin\omega\sin\alpha - a\cos\omega\cos\alpha , \\ q_3 = \cos\omega , & q_6 = -a\sin\omega . \end{cases}$$

Umgekehrt sind in den Gleichungen (3), (4), (8), (9) die natürlichen Zeiger durch die rechtwinkligen homogenen Plückerschen Zeiger dargestellt. Die in den q homogenen Formeln nullter Dimension (4), (8), (9) sind natürlich von der Bedingung (1) unabhängig.

---

§ 19. Die Fortschreitungsrichtungen im Linienraum.

Wenn wir einen Strahl s von einer Anfangslage s_0 aus bewegen und dabei s_0 als Achse eines natürlichen Zeigersystems wählen (§ 18), so können die beiden Zeiger z und α sofort beliebige Werte annehmen, während a und ω von Null an sich ändern. Wir definieren daher eine „Umgebung“ des Strahles s_0, indem wir für a und den absoluten Betrag von ω eine hinreichend kleine obere Grenze annehmen.

Analog wie im Punktraum alle Kurven, die sich in einem Punkt berühren, daselbst dieselbe Fortschreitungsrichtung haben, so wollen wir sagen, daß im Linienraum alle Regelflächen, die sich längs eines ganzen Strahls s berühren, in diesem Strahl dieselbe Fortschreitungsrichtung haben. Wo kein Mißverständnis zu befürchten ist, werden wir auch die kürzere Bezeichnung „Richtung“ gebrauchen. Wenn für irgend eine durch s_0 gehende Regelfläche in der Umgebung von s_0 die vier natürlichen Zeiger als Funktionen eines Parameters t gegeben sind, wobei dem Werte $t = 0$ die Lage s_0 entsprechen möge, so ist der Verteilungsparameter (§ 1)

$$P = \lim \frac{a}{\omega},$$

während $\lim z$ und $\lim \alpha$ die Lage von Zentralpunkt und Zentralebene bestimmen; P ist positiv, wo die Fläche links gewunden ist. Zwei Regelflächen berühren sich längs s_0, wenn sie in s_0 den Zentralpunkt, die Zentralebene und den Verteilungsparameter gemein haben. Eine Fortschreitungsrichtung durch s_0 kann also durch drei Zahlen gekennzeichnet werden, als welche

$$z, \alpha, P$$

tauglich sind. Diese drei Zahlen nennen wir die Zeiger der Fortschreitungsrichtung. Es gibt im Linienraum

von einem Strahl aus ∞^3-Richtungen, in einem Komplex ∞^2, in einer Kongruenz ∞^1 und in einer Regelfläche eine einzige. Die Dimension der Richtungen ist immer um eins kleiner als die der Mannigfaltigkeit selbst. Zu jeder Richtung gehört analog wie im Punktraum zweierlei Durchlaufungssinn.

Durch die Gleichung

$$\frac{a}{\omega} = \text{const.} = P$$

ist bei konstantem α und z eine Schraubenfläche definiert, die an der Stelle s_0 als Repräsentant der betreffenden Richtung gelten kann. Zwei Stellen des Punktraums bestimmen eine einzige Verbindungsgerade, dagegen bestimmen zwei Gerade des Linienraums unendlich viele gewöhnliche Schraubenflächen, deren Achse in ihren kürzesten Abstand fällt. Es können nämlich in dem durch die beiden Geraden begrenzten Teile der Schraubenfläche entweder keine, oder eine, oder zwei ... ganze Windungen der Fläche enthalten sein. Deshalb wollen wir die Anwendung des Richtungsbegriffs, der eine präzisere Fassung mancher Sätze erlaubt, im Linienraum auf die Umgebung eines gegebenen Strahls beschränken.

Wenn $P = 0$ ist, nennen wir die betreffende Richtung eine schneidende Richtung. An Stelle der Schraubenfläche tritt ein repräsentierendes Strahlbüschel, dessen Scheitel der Kuspidalpunkt, dessen Ebene die Kuspidalebene derjenigen Regelflächen ist, die diese Richtung haben. Durch den Richtungszeiger α wird die Normale der Kuspidalebene bestimmt. Für $P = \infty$ nennen wir die betreffende Richtung eine „zylindrische“*). An Stelle der Schraubenfläche tritt ein Parallelstrahlenbüschel.

Da in einem Strahl einer windschiefen Fläche auch eine Korrelation definiert ist (Satz 2), so müssen die Fortschreitungsrichtungen und die Korrelationen eines Strahls s_0 in gegenseitig eindeutiger Beziehung stehen, die wir noch etwas näher untersuchen wollen, um den Zusammenhang mit gewissen Untersuchungen von Koenigs (Sur les propr. inf. de l'espace réglé, Thèse 1882) herzustellen:

*) Wenn es sich um projektive Eigenschaften handelt, wird es zweckmäßig sein, die zylindrischen Richtungen den schneidenden beizuzählen.

Sei s eine Nachbarlage von s_0; $AB = a$ der kürzeste Abstand zwischen s_0 und s (Fig. 7); $s' \parallel s$ durch A; Q ein beliebiger Punkt von s; $QP \perp s_0$ und $QP' \perp s_0$. Dann ist $P'P \parallel a$ und $QPP' = \tau$ der Winkel der Ebene $s_0 P$ mit der Ebene $s_0 a$, die zugleich die Zentralebene von s_0 für dasjenige hyperbolische Paraboloid ist, welches durch a, QP und die unendlich ferne Gerade der Ebene $s_0 s'$ als Leitlinien bestimmt ist. Setzen wir $AQ = \zeta$, so finden wir:

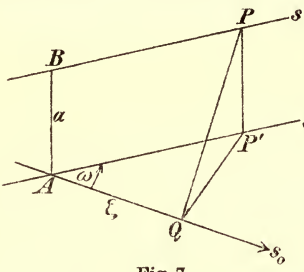

Fig. 7.

$$-\zeta \cot\tau = a \cot\omega .$$

Wenn wir zur Grenze übergehen, entspricht τ der Berührungsebene im Punkte Q und wir erhalten:

$$(11) \qquad -\zeta \cot\tau = \lim \frac{a}{\operatorname{tg}\omega} = \lim \frac{a}{\omega} = P.$$

Durch Vergleich mit Bd. I, § 53, Gleichung (66) sehen wir die Beziehung mit der Konstanten K der dortigen Korrelationsgleichung $\operatorname{tg}\tau = K\zeta$, nämlich:

$$(12) \qquad KP = -1 .$$

Zählen wir die Abstände ζ anstatt vom Zentralpunkt von einem beliebigen Punkte der Geraden s_0, die Winkel von einer beliebigen Ebene durch s_0, so tritt an Stelle von (11) die Gleichung

$$(13) \qquad (\zeta - z)\cot(\tau - \tau_0) = -P.$$

Jetzt hat das Zeigersystem gegen die Korrelation keine ausgezeichnete Lage mehr; (13) stellt also eine beliebige Korrelation des Trägers s_0 dar, wobei z, τ_0, P die Zeiger der zugeordneten Fortschreitungsrichtung sind. Setzen wir

$$\cot\tau = u , \quad \cot\tau_0 = v ,$$

so erhalten wir aus (13) eine bilineare Relation zwischen den Veränderlichen ζ und u von der Form*):

$$(14) \qquad a\zeta u - b\zeta + pu - q = 0 ,$$

*) Wir schließen uns an die Bezeichnung Koenigs (a. a. O., S. 15) an; der frühere Abstand $a = AB$ spielt jetzt keine Rolle mehr.

wobei

$$(15)\qquad \frac{a}{b} = -v, \qquad \frac{p}{b} = zv + P, \qquad \frac{q}{b} = Pv - z\,.$$

Durch Auflösung nach den Richtungszeigern erhält man

$$(16)\qquad v = -\frac{a}{b}, \qquad P = \frac{-aq + bp}{a^2 + b^2}, \qquad z = -\frac{ap + bq}{a^2 + b^2}\,.$$

Satz 39: Ist eine Gerade g Träger einer Korrelation, so stehen die Abstände der Punkte auf g von einem beliebigen festen Punkt auf g und die Tangenten (Kotangenten) der Winkel der entsprechenden Ebenen mit einer beliebigen festen Ebene durch g in bilinearer Beziehung und umgekehrt: Jede solche bilineare Beziehung bedeutet eine Korrelation.

Vermöge der Gleichungen (15) kann man in den Formeln Koenigs unsere Richtungszeiger z, v, P einführen, vermöge (16) umgekehrt. Z. B. findet Koenigs, a. a. O., S. 13 und 14 als Bedingung der Involution zweier Korrelationen (über diesen Begriff vgl. Bd. I, § 56), deren Koeffizienten durch die Indizes eins und zwei unterschieden sein mögen:

$$(17)\qquad a_1 q_2 + a_2 q_1 - b_1 p_2 - b_2 p_1 = 0\,.$$

Durch Einführung der Richtungszeiger erhält man:

$$v_1 z_2 + v_2 z_1 - v_1 z_1 - v_2 z_2 = (P_1 + P_2)\quad (1 + v_1 v_2)\,.$$

Legt man das Zeigersystem so, daß für die erste Korrelation, die wir als fest denken, $z_1 = 0$, $v_1 = \infty$ ist, so stellt

$$z_2 = (P_1 + P_2) v_2 \quad \text{oder} \quad z_2 \operatorname{tg}\tau_2 = P_1 + P_2$$

wobei P_1 konstant ist, alle Korrelationen dar, die zu einer festen involutorisch liegen. Sie lassen sich also zu je ∞^1 so anordnen, daß ihre Zentralpunkte und Zentralebenen selbst Korrelationen bilden. Man kann dieses Ergebnis auch unabhängig von der Gleichung (17) ableiten (Koenigs, a. a. O., S. 59): Die Korrelation, die der Richtung z, α, P entspricht, wird nach (3) durch die Gleichung

$$\zeta - z = -P \operatorname{tg}(\tau - \alpha)$$

dargestellt; soll sie zur festen Korrelation

$$\zeta' = -P' \operatorname{tg}\tau'$$

involutorisch sein, so muß eine bezüglich τ, τ' symmetrische Gleichung hervorgehen, wenn man $\zeta' = \zeta$ setzt und dann ζ eliminiert. Dies führt wie vorhin zur Bedingung:

$$z \operatorname{tg}\alpha = (P + P'). \tag{18}$$

Satz 40: Hebt man von den ∞^2 Korrelationen einer Geraden, die zu einer festen involutorisch liegen, diejenigen heraus, deren Parameter einen gegebenen Wert P hat, so bilden ihre Zentralpunkte und Zentralebenen selbst eine Korrelation.

Man kann anstatt mit den „Richtungen" im Linienraum auch, wie es Koenigs tut, mit den Korrelationen operieren; aber der Richtungsbegriff ist anschaulicher. Hat die feste Korrelation die Zeiger z', α', P' statt $0, 0, P'$, so tritt an Stelle von (18):

$$(z - z') \operatorname{tg}(\alpha - \alpha') = P + P'. \tag{18a}$$

---

§ 20. Die Umgebung eines Kongruenzstrahles.

Wenn wir zu einem Strahl s einer Kongruenz durch den Ursprung des Zeigersystems eine Parallele ziehen und mit einer Einheitskugel um den Ursprung in S zum Schnitt bringen, so heißt S die sphärische Abbildung von s. Die Umgebung von s wird so auf eine Umgebung von S abgebildet*). Ziehen wir durch S auf der Kugelfläche ∞^1 Kurven nach allen Richtungen, so entsprechen diesen ∞^1 Regelflächen. Je zwei Bildkurven, die sich in S berühren, entsprechen zwei Regelflächen, die sich längs s berühren. Entsprechend den ∞^1 Richtungen auf der Kugelfläche sind auch in der Kongruenz, wie schon erwähnt, nur ∞^1 Fortschreitungsrichtungen enthalten. Es können also zwei der drei Zeiger z, P, α, welche die Richtung im Linienraum bestimmen (§ 19), als Funktion des dritten aufgefaßt werden, und diese Abhängigkeit wollen wir jetzt aufsuchen.

*) Diese Art der Abbildung wäre nur für solche Kongruenzen ausgeartet, die sich in ∞^1 Zylinderflächen zerfällen lassen; wir nennen sie der Kürze halber zylindrische Kongruenzen, die anderen nichtzylindrische.

Wenn die rechtwinkligen homogenen Linienzeiger $q_1, \dots q_6$ als Funktionen zweier Parameter u, v gegeben sind

$$q_i = q_i(u, v), \tag{19}$$

$$\sum_1^3 q_i q_{i+3} = 0, \tag{19a}$$

so ist dadurch eine Kongruenz bestimmt. Wir wollen die Umgebung eines Strahles s, dem die Parameterwerte u_0, v_0 entsprechen, untersuchen und dürfen, da $u - u_0$, $v - v_0$ als neue Parameter eingeführt werden können, voraussetzen, daß $u_0 = v_0 = 0$ ist. Wir setzen ferner für die Umgebung von s die Entwickelbarkeit der Zeiger in Taylorsche Reihen voraus und verlegen nach s die Z-Achse des rechtwinkligen Systems und gleichzeitig die Achse eines natürlichen Zeigersystems. Wenn wir noch

$$\left(\frac{\partial q_i}{\partial u}\right)_{u=v=0} = q_{iu}, \qquad \left(\frac{\partial q_i}{\partial v}\right)_{u=v=0} = q_{iv}$$

bezeichnen, so ist für die Umgebung von s

$$q_i = q_{iu} u + q_{iv} v + \dots \tag{20}$$

mit Ausnahme von

$$q_3 = 1 + q_{3u} u + q_{3v} v + \dots \tag{20a}$$

Führen wir dies in die aus (9) folgende Gleichung (9a), nämlich

$$Z = \frac{q_1 q_5 - q_2 q_4}{q_1^2 + q_2^2} \tag{9a}$$

ein, so erhalten wir

$$Z = \frac{A u^2 + 2B u v + C v^2 + \dots}{L u^2 + 2M u v + N v^2 + \dots}, \tag{21}$$

wobei

$$\left\{\begin{aligned} L &= q_{1u}^2 + q_{2u}^2, \\ M &= q_{1u} q_{1v} + q_{2u} q_{2v}, \\ N &= q_{1v}^2 + q_{2v}^2, \\ A &= q_{1u} q_{5u} - q_{2u} q_{4u}, \\ B &= \tfrac{1}{2}(q_{1u} q_{5v} + q_{1v} q_{5u} - q_{2u} q_{4v} - q_{2v} q_{4u}), \\ C &= q_{1v} q_{5v} - q_{2v} q_{4v}. \end{aligned}\right. \tag{22}$$

Es hängt also $\lim Z = z$, wie zu erwarten, nur von $v:u$ ab. Im Nenner steht im allgemeinen eine definite quadratische Form; denn es ist identisch:

$$LN - M^2 = (q_{1u}\, q_{2v} - q_{1v}\, q_{2u})^2 .$$

Schon hieraus kann man entnehmen, daß die Werte z auf ein endliches Intervall beschränkt sind.

Wir wollen aber, um dies genauer zu untersuchen, zunächst eine Vereinfachung vornehmen, die zugleich eine größere Anschaulichkeit mit sich führt: Wir setzen voraus, die Parameter u, v seien mit q_1, q_2 identisch (wodurch nur die zylindrischen Kongruenzen vorläufig ausgeschlossen werden), und die Gleichungen der Kongruenz seien so geschrieben, daß

$$\sum_1^3 q_i^2 = 1 . \tag{23}$$

Dann sind u, v, wie wir jetzt statt q_1, q_2 schreiben, zugleich die ersten beiden rechtwinkligen Zeiger der sphärischen Abbildung. Ferner folgt aus den Gleichungen (8)

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{u^2}{u^2+v^2} = \sin^2\alpha , & \dfrac{uv}{u^2+v^2} = -\sin\alpha\cos\alpha , \\ & \dfrac{v^2}{u^2+v^2} = \cos^2\alpha . \end{array}\right. \tag{24}$$

Aus (21) und (24) ergibt sich nun*):

$$z = q_{5u}\sin^2\alpha + (q_{4u} - q_{5v})\sin\alpha\cos\alpha - q_{4v}\cos^2\alpha . \tag{25}$$

*) Diese Gleichung (25) und die folgende (27) gilt also für jeden Strahl einer nichtzylindrischen Kongruenz, in dessen Umgebung überhaupt eine Entwicklung der Zeiger in eine Taylorsche Reihe möglich ist. Die Strahlen, bei denen dies nicht der Fall ist (z. B. wenn eine der partiellen Ableitungen unendlich wird) und auch diejenigen, bei denen sämtliche Koeffizienten in (25) und (27) verschwinden, rechnen wir zu den singulären. Es genügt, die Entwickelbarkeit von q_4 und q_5 nach u, v vorauszusetzen; dann folgt aus (19) und (23) dasselbe für q_3 und q_6. Überhaupt kann man sich vorstellen, daß die Kongruenz als zweifache Mannigfaltigkeit innerhalb einer vierfachen nur von zwei Funktionen (etwa q_4 und q_5) abhängt. Über die Definition der singulären Strahlen vgl. § 34.

Aus (19a) und (23) erhalten wir

$$(26)\quad \begin{cases} q_6 = -(u\,q_4 + v\,q_5)(1-u^2-v^2)^{-\frac{1}{2}} \\ \quad = -[q_{4u}u^2 + (q_{4v}+q_{5u})uv + q_{5v}v^2] + \dots \end{cases}$$

Führen wir dies in

$$P = \lim \frac{a}{\omega} = -\lim \frac{q_6}{u^2+v^2}$$

ein, so kommt nach (24):

$$(27)\quad P = q_{4u}\sin^2\alpha - (q_{4v}+q_{5u})\sin\alpha\cos\alpha + q_{5v}\cos^2\alpha\,.$$

Da die Koeffizienten in den Gleichungen (25) und (27) für die Umgebung eines festen Ausgangsstrahles konstant sind, haben wir hiermit schon die gewünschte Abhängigkeit der Zeiger z und P der Fortschreitungsrichtungen vom dritten Zeiger α gefunden. Wir können aber noch durch Verschiebung des natürlichen Zeigersystems längs s und durch Drehung um s weitere Vereinfachungen erzielen und berechnen zu diesem Zwecke zunächst die Lage gewisser ausgezeichneter Punkte und Ebenen: Die Extreme von z sind durch die Gleichung

$$(28)\qquad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{q_{5v}-q_{4u}}{q_{5u}+q_{4v}}$$

bestimmt, zu der zwei zueinander senkrechte Ebenen gehören; sie heißen die Hauptebenen des Strahles s. Bezeichnen wir

$$(28a)\qquad D = \left|\sqrt{(q_{5v}-q_{4u})^2 + (q_{5u}+q_{4v})^2}\right|,$$

so sind durch

$$(29)\quad \begin{cases} \cos 2\alpha = \dfrac{q_{5u}+q_{4v}}{D}\,, \\ \sin 2\alpha = \dfrac{q_{5v}-q_{4u}}{D}\,, \end{cases}$$

$$(30)\quad \begin{cases} \cos 2\alpha = \dfrac{q_{5u}+q_{4v}}{-D}\,, \\ \sin 2\alpha = \dfrac{q_{5v}-q_{4u}}{-D}\,, \end{cases}$$

die beiden Hauptebenen getrennt, und zwar entspricht (29) das Minimum z_1; (30) das Maximum z_2 von z. Die Punkte, die diesen extremen Werten z entsprechen, heißen Grenzpunkte, der Halbierungspunkt der Strecke zwischen den Grenzpunkten heißt Mittelpunkt M des Strahles s, die Normalebene von s in M Mittelebene von s; die Normalebenen in den Grenzpunkten heißen Grenzebenen. Berechnet man die Werte z_1, z_2, so findet man als geometrische Bedeutung von D:

$$D = z_2 - z_1 \tag{31}$$

(also den Abstand der Grenzpunkte), als Zeiger z_0 des Mittelpunktes:

$$z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2} = q_{5u} - q_{4v}\,. \tag{32}$$

Verlegen wir nun den Ursprung in den Mittelpunkt, so ist

$$q_{5u} = q_{4v} = -C\,. \tag{33}$$

Verlegen wir die Ausgangsebene (§ 18) in eine Hauptebene, so ist

$$q_{5v} = q_{4u} = C'\,; \tag{34}$$

verlegen wir sie aber in eine Halbierungsebene der Winkel zwischen den Hauptebenen, so ist:

$$q_{5u} = -q_{4v} = -C''. \tag{35}$$

Je nachdem wir die Vereinfachung (33) zugleich mit (34) oder (35) eintreten lassen (im zweiten Falle $C = C'' = 0$), erhalten wir an Stelle von (25) und (27) die Gleichungen:

$$z = C\cos 2\alpha\,, \tag{25a}$$

$$P = C' + C\sin 2\alpha \tag{27a}$$

oder

$$z = \tfrac{1}{2}(q_{4u} - q_{5v})\sin 2\alpha\,, \tag{25b}$$

$$P = q_{4u}\sin^2\alpha + q_{5v}\cos^2\alpha\,, \tag{27b}$$

von denen wir die letzteren der Diskussion zugrunde legen werden. Zunächst aber wollen wir durch Auswahl einer der beiden Hauptebenen die Beziehung der Umgebung von s zum ausgezeichneten Zeigersystem vollkommen eindeutig machen: Schreiben wir die Gleichungen (25b) und

(27b) in der Form

$$(36)\qquad \begin{cases} z = \frac{1}{2}(A - B)\sin 2\alpha \\ P = A\sin^2\alpha + B\cos^2\alpha \end{cases}$$

und drehen dann die Ausgangsebene um 90^0, so vertauschen sich die beiden Koeffizienten in der zweiten Gleichung und der in der ersten ändert sein Zeichen. Wenn also weder A noch B Null ist, können wir immer einen der beiden Fälle erreichen:

$$(\mathrm{I})\qquad A > 0 > B.$$

$$(\mathrm{II})\qquad |B| \geqq |A| \quad \text{(beide gleichbezeichnet)},$$

denen wir hinzuzufügen haben:

$$(\mathrm{III})\qquad A = 0, \quad B \neq 0.$$

Die entsprechenden drei Strahlenarten nennen wir reguläre nicht zylindrische Strahlen. Es hätte nun keine Schwierigkeit, sich in den verschiedenen Fällen eine Vorstellung von den ∞^1 berührenden Schraubenflächen zu machen, durch welche wir die in der Umgebung von s vorkommenden Fortschreitungsrichtungen nach § 19 repräsentieren können (wenn $P = 0$ ist, tritt ein Strahlenbüschel an Stelle der Schraubenfläche). Es ist aber noch deutlicher, die gewonnenen Ergebnisse zuerst auf die Hauptstrahlen der Strahlennetze anzuwenden, weil wir sehen werden, daß sich die Umgebung eines regulären Strahles einer beliebigen Kongruenz ebenso verhält.

Vorher aber bemerken wir, daß sich bei den zylindrischen Kongruenzen voraussetzen läßt, q_1, q_2, q_3 seien Funktionen des einen Parameters u allein; dann wird in (22) $M = N = C = 0$ und aus (21):

$$(21\mathrm{a})\qquad z = \frac{A}{L} + 2\frac{B}{L}\cdot\frac{v}{u}.$$

Der Zentralpunkt der Regelflächen durchläuft also den ganzen Strahl (außer wenn auch $B = 0$). Ebenso verhalten sich in dieser Beziehung einzelne Strahlen der nichtzylindrischen Kongruenzen, für die bei passender Wahl der Parameter

$$q_{1v} = q_{2v} = q_{3v} = 0$$

wird. Wir nennen sie zylindrische Strahlen. Über das P dieser Strahlen vgl. § 22, Schluß.

UNIVERSITY OF CALIFORNIA

Durch Elimination von α aus den Gleichungen (36) erhält man die Beziehung zwischen P und z:

$$(36a) \qquad (P-A)\,(P-B)+z^2=0.$$

Die analoge Beziehung bei den zylindrischen Strahlen ist linear und wird aus (21a) und (46a) erhalten ($p^2=1$).

Die erste Gleichung (36) drückt ein Gesetz aus, das schon von Hamilton (1830) gefunden wurde. Läßt man nämlich die Vereinfachung (34) allein eintreten und bezeichnet die extremen Werte von z mit r_1 und r_2, so nimmt (25) die Gestalt

$$(25c) \qquad z=r_1\cos^2\alpha+r_2\sin^2\alpha$$

an. Diese Gleichung heißt Hamiltonsche Gleichung und ist der ersten Gleichung (36) gleichwertig. Dagegen scheint die zweite Fundamentalgleichung (36) zuerst bei Mannheim (Liouv. J. (2) 17, S. 126 [1872] und Géom. ciném., S. 284) aufzutreten, obgleich Cesàro beide Gleichungen als Formeln von Hamilton bezeichnet (Vorl. über natürliche Geom., § 211)*).

Zu jeder Fortschreitungsrichtung (α) in der Kongruenz gehören gewisse andere, nämlich die „symmetrische" $(-\alpha)$, die „quasiorthogonale" $\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$**), die „komplementäre" $\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$. Diese Beziehungen sind gegenseitig, so daß man von „zwei symmetrischen" usw. Richtungen sprechen kann. Man kann aus den Gleichungen (36) unmittelbar ablesen, in welcher Beziehung die beiden Werte z oder die beiden Werte P stehen, die zu zwei auf diese Art zusammengehörigen Richtungen gehören; wir überlassen es deshalb

*) Allerdings findet sich bei Kummer, J. f. M., Bd. 57, S. 200 eine Formel für P $\left(\text{dort } \frac{dp}{d\varepsilon}\right)$ als Funktion eines unabhängigen Parameters t; aber t hat nicht unmittelbar die Bedeutung eines Azimuts um den betrachteten Strahl, deshalb gestattet die Formel keine einfache geometrische Deutung und wird auch gar nicht weiter diskutiert. Die Gleichung (36a) kann bis auf eine Vorzeichenbestimmung eine der Gleichungen (36) ersetzen und findet sich ebenfalls bei Cesàro, in geometrischer Form auch bei Mannheim (Géom. ciném., S. 281, Theorem 8′).

**) Sie ist nicht im Sinne des § 46 orthogonal zu (α).

dem Leser, dies in Worten auszusprechen*). Auch sieht man, daß die quasiorthogonale Richtung der symmetrischen die komplementäre ist, u. dgl.

---

§ 21. Die Umgebung der Hauptstrahlen der Netze.

Um die Gleichungen (25b) und (27b) auf die Hauptstrahlen der Netze anzuwenden, müssen wir die Gleichungen (78a), (83) und (85) in Bd. I, § 55 zuerst durch $\sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2}$ dividieren, um die Bedingung (23) zu erfüllen. Führen wir dann die so geänderten Größen q_1, q_2 als neue Parameter ein und bezeichnen sie mit u, v, so erhalten wir für das hyperbolische Netz

$$q_4 = c\,u\,\mathrm{tg}\varphi\,, \quad q_5 = -c\,v\,\mathrm{cot}\varphi\,, \tag{37}$$

wobei 2φ der Winkel der Brennlinien, $2c$ der kürzeste Abstand derselben ist; für das elliptische Netz:

$$q_4 = -c\,m\,u\,, \qquad q_5 = -\frac{c\,v}{m}\,, \tag{38}$$

wobei $2c$ der Abstand der beiden Potenzebenen ist, m das Achsenverhältnis der Kehlellipsen der koaxialen Hyperboloide, in die das Netz zerlegt werden kann; für das parabolische Netz:

$$q_4 = 0\,, \qquad q_5 = -\frac{v}{K}\,; \tag{39}$$

in allen drei Fällen ist hinzuzufügen:

$$q_1 = u\,, \quad q_2 = v\,, \quad q_3 = \sqrt{1-u^2-v^2}\,.$$

Es ist in der Tat $q_{5u} = q_{4v} = 0$, also sind die Bedingungen für die Anwendbarkeit der Gleichungen (25b) und (27b) erfüllt und man erhält für das hyperbolische Netz

$$z = c\frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\varphi}\,, \qquad P = c(\mathrm{tg}\varphi\sin^2\alpha - \mathrm{cot}\varphi\cos^2\alpha)\,, \tag{40}$$

*) Die entsprechenden Beziehungen zwischen den „Nachbarstrahlen", zu denen zwei symmetrische oder zwei quasiorthogonale Richtungen führen, finden sich (unter anderen Bezeichnungen) bei Hensel (J. f. Math., Bd. 102, 1888). Der dortige Satz über „Diametralstrahlen" ist selbstverständlich, sobald man den Begriff der Richtung im Linienraum einführt.

für das elliptische:

$$(41)\quad z = c\frac{1-m^2}{2m}\sin 2\alpha\,, \qquad P = -c\left(m\sin^2\alpha + \frac{1}{m}\cos^2\alpha\right),$$

für das parabolische:

$$(42)\qquad z = \frac{\sin 2\alpha}{2K}\,, \qquad P = -\frac{\cos^2\alpha}{K}\,.$$

Da in (40) c stets positiv und φ ein spitzer Winkel ist (Bd. I, § 55, a), in (41) stets $0 < m \leqq 1$ und c bei den rechtsgewundenen Netzen positiv ist (Bd. I, § 55, c), so ordnen sich die Gleichungspaare (40), (41), (42) der Reihe nach unter die Fälle (I), (II), (III) des vorigen Paragraphen unter, die eben mit Rücksicht auf diese einfachsten Beispiele so normiert wurden. Vergleicht man die Ausdrücke für z mit der dritten Gleichung

$$z = h\sin 2\alpha$$

des Zylindroids (Bd. I, § 75), so folgt für alle drei Fälle (vgl. Bd. I, Satz 162):

Satz 41: Die Zentraltangenten aller Regelflächen, die durch den Hauptstrahl eines Netzes gehen, liegen auf einem Zylindroid, dessen Gesamthöhe $2h$ in den drei Fällen der Reihe nach durch

$$(43)\quad 2h = \frac{2c}{\sin 2\varphi}\,, \qquad 2h = \frac{c}{m}(1-m^2), \qquad 2h = \left|\frac{1}{K}\right|$$

bestimmt ist*).

Nur für den Fall daß $P = 0$ ist, wo also der Hauptstrahl zugleich Kuspidalerzeugende wird, ist an Stelle der Zentraltangente die im Kuspidalpunkt errichtete Normale auf die längs der Kuspidallinie berührende Ebene (die „Kuspidalebene") der Regelfläche zu setzen, weil die Grenzlage des kürzesten Abstandes in diese Linie übergeht. Dieser Fall kann nur bei den hyperbolischen und parabolischen Netzen eintreten und zwar wird bei den ersteren $P = 0$ für

$$(44)\qquad \operatorname{tg}\alpha = \pm\cot\varphi\,.$$

*) Man beachte, daß $2h$ zugleich der Abstand der Grenzpunkte und in der ersten Gleichung $2c$ der Abstand der Brennpunkte ist.

In der Tat stimmt dies mit der folgenden unmittelbaren Überlegung überein (vgl. Bd. I, Fig. 73 und die Diskussion daselbst): Wenn eine Brennlinie den Hauptstrahl in S schneidet und man zieht durch S diejenige Parallele β zur Mittelebene, welche die andere Brennlinie b' senkrecht kreuzt, so liegt auch β auf dem Zylindroid und ist als Grenzlage des kürzesten Abstandes derjenigen Netzstrahlen zu betrachten, die sich in S schneiden, also dem Büschel (S, b') angehören. Die Ebene dieses Büschels ist Kuspidalebene für alle Regelflächen, die man durch die Verbindungslinien zweier Punkte P, P' definiert, von denen P' auf b' mit endlicher Geschwindigkeit den Schnittpunkt mit dem Hauptstrahl durchschreiten, dagegen P auf b so nach S gelangen möge, daß dort die Geschwindigkeit Null wird (wobei im gewöhnlichen Fall P in S umkehren wird). Die Linie β und die analoge β' trennen auf dem Zylindroid die beiden Gebiete, für welche die zu den Zylindroidstrahlen als Grenzlagen der kürzesten Abstände gehörigen Werte P verschiedene Vorzeichen haben.

---

§ 22. Die extremen Werte des Verteilungsparameters.

Aus dem Werte von $\frac{dP}{d\alpha}$ (Gleichung (36)) entnimmt man unmittelbar:

Satz 42: Die Extreme von P gehören zu denjenigen Regelflächen der Kongruenz, deren Zentraltangenten in die Mittelebene von s fallen.

Wir hätten hier ebensogut sagen können „deren Zentralebenen die Halbierungsebenen der Winkel zwischen den Hauptebenen sind“ und wollen diese Zentralebenen als „Krümmungsebenen“ bezeichnen, weil ihr Azimut α denjenigen Fortschreitungsrichtungen der Kongruenz zugehört, in denen die berührenden Schraubenflächen, wie aus § 3, Gleichung (27) hervorgeht, in ihren Zentralpunkten extreme Werte des Krümmungsmaßes haben. Z. B. sind also für die Hauptstrahlen der Netze bei der Lage des Zeigersystems, wie sie in Bd. I, § 55 a, c, d) und auch hier stets gewählt wurde, die XZ- und die YZ-Ebene die Krümmungsebenen, dagegen die Ebenen $y = \pm x$ die Hauptebenen.

Die extremen Werte von P sind vom Zeigersystem unabhängige Zahlen, die zugleich mit den Konstanten A und B der Normalform (36) identisch sind. Diese aber hängen wieder in einfacher Weise (vgl. den nächsten Paragraphen) mit gewissen anderen Konstanten zusammen, die für die Umgebung des betrachteten Strahles charakteristisch sind. Es ist daher wichtig, die Extreme von P für eine beliebige Lage des Strahles gegen das Zeigersystem zu berechnen: Wir setzen jetzt voraus, die Zeiger p des Kongruenzstrahles seien als Funktionen irgend zweier Parameter u, v gegeben:

$$p_\nu = p_\nu(u, v). \tag{45}$$

Es ist nach den Bezeichnungen in Bd. I, § 37:

$$P = -\lim \frac{M}{w^2} p\, q\,.$$

Hier haben wir, wenn die Umgebung des Strahles $p_\nu(u, v)$ betrachtet werden soll, die Entwicklungen von $p_\nu(u+\mathfrak{u}, v+\mathfrak{v})$ für q_ν in die Ausdrücke für M und w^2 einzusetzen. Durch partielle Differentiation der Identität

$$\sum_1^6 p_\nu p_{\nu+3} = 0$$

findet man:

$$\sum_1^6 p_{\nu+3}\, p_{\nu u} = 0\,, \qquad \sum_1^6 p_{\nu+3}\, p_{\nu v} = 0\,,$$

$$\sum_1^6 p_{\nu+3} \frac{\partial^2 p_\nu}{\partial u^2} = -\sum_1^6 p_{\nu+3,u}\, p_{\nu u} \text{ usw.}$$

Setzt man noch $\frac{\mathfrak{v}}{\mathfrak{u}} = \lambda$, so erhält man

$$P = \frac{R + 2S\lambda + T\lambda^2}{U + 2W\lambda + V\lambda^2} \cdot p^2 \text{ *).} \tag{46}$$

*) Im Zähler ist die alphabetische Ordnung R, S, T eingehalten, aber nicht im Nenner, weil v zu V in derselben Beziehung steht, wie u zu U.

Dabei ist

$$(47)\quad \begin{cases} R=\sum_{\nu=1}^{3} p_{\nu u}\,p_{\nu+3,u}\,, \qquad T=\sum_{1}^{3} p_{\nu v}\,p_{\nu+3,v}\,, \\ S=\tfrac{1}{2}\sum_{1}^{6} p_{\nu u}\,p_{\nu+3,v}\,. \end{cases}$$

$$(48)\quad \begin{cases} U=\Sigma(p_2p_{3u}-p_3p_{2u})^2\,, \quad V=\Sigma(p_2p_{3v}-p_3p_{2v})^2\,, \\ W=\Sigma(p_2p_{3u}-p_3p_{2u})(p_2p_{3v}-p_3p_{2v}) \end{cases}$$

und die Summen in (48) beziehen sich auf noch zwei andere Glieder, die durch zyklische Vertauschung der Marken 1, 2, 3 hervorgehen. Die Werte, welche P zu einem Extrem machen, ergeben sich aus der Gleichung*)

$$(49)\quad (U+2W\lambda+V\lambda^2)(S+T\lambda)=(R+2S\lambda+T\lambda^2)(W+V\lambda)$$

oder

$$(50)\quad \begin{vmatrix} U & R & \lambda^2 \\ W & S & -\lambda \\ V & T & 1 \end{vmatrix}=0\,.$$

Es kommt uns weniger auf die Berechnung dieser Werte λ an, als auf die zugehörigen extremen Werte P_e; für diese entnehmen wir unmittelbar aus (46) und (49):

$$(51)\quad P_e=\frac{S+T\lambda}{W+V\lambda}p^2\,.$$

Eliminieren wir aus (50) und (51) das λ, so erhalten wir die quadratische Gleichung für P_e, deren Wurzeln die Werte A und B der Gleichung (36) sind (über die Ausführung dieser Elimination vgl. Scheffers, a. a. O.):

$$p^4(RT-S^2)-p^2(UT-2WS+VR)P_e+(UV-W^2)P_e^2=0\,.$$

Insbesondere ist:

$$(52)\quad AB=\frac{RT-S^2}{UV-W^2}p^4\,, \quad A+B=\frac{UT-2WS+VR}{UV-W^2}p^2\,.$$

Es kann sein, daß P von λ unabhängig wird, indem die Koeffizienten im Zähler und Nenner von (46) einander

*) Ganz analog ist die Aufgabe der Flächentheorie, die Hauptkrümmungshalbmesser in einem Punkte einer Fläche zu finden. Vgl. z. B. Scheffers, Theorie der Flächen, S. 116 f.

proportional werden. Ein solcher Strahl heiße isotrop. Die Bedingungen für ihn sind:

$$(53) \qquad UT - VR = 0, \quad US - WR = 0, \quad VS - WT = 0,$$

unter denen sich zwei unabhängige befinden*). Die Strahlen, für die $A = -B$ ist, nennen wir aus einem später (§ 30) ersichtlichen Grunde Normalstrahlen. Die Bedingung für einen solchen ist also:

$$(53a) \qquad UT - 2WS + VR = 0.$$

Satz 43: Die isotropen Strahlen einer Kongruenz sind im allgemeinen isoliert, die Normalstrahlen bilden eine Regelfläche**).

Es mag noch bemerkt werden, daß nicht nur U, V, sondern auch $UV - W^2$ wesentlich positiv ist, weil es sich nach der Identität (24) des § 3 als Summe dreier Quadrate darstellen läßt.

Für die zylindrischen Strahlen wird (§ 20, Schluß) $T = V = W = 0$ und

$$(46a) \qquad P = p^2\left(\frac{R}{U} + 2\frac{S}{U}\lambda\right).$$

P durchläuft alle Werte zwischen $-\infty$ und $+\infty$ (außer wenn auch $S = 0$).

Eine Kongruenz, deren sämtliche Strahlen isotrop sind, heißt selbst isotrop; eine Kongruenz, deren Strahlen alle Normalstrahlen sind, heißt eine Normalenkongruenz (vgl. § 30).

---

*) Wenn von den Determinanten einer Matrix mit zwei Zeilen und drei Spalten zwei verschwinden, so kann man im allgemeinen schließen, daß auch die dritte verschwindet; nur dann nicht, wenn das Verschwinden jener zwei dadurch entsteht, daß die Elemente der gemeinsamen Spalte beide Null sind. Dieser Fall wird in § 28 wichtig werden.

**) Dieser Satz ergibt sich auch mit den Hilfsmitteln des folgenden Paragraphen; in der Tat ist es für das Hauptnetz eine zweifache Bedingung, daß jede seiner Brennlinien den unendlich fernen imaginären Kugelkreis trifft, dagegen nur eine einfache, daß sich seine Brennlinien senkrecht kreuzen. Analog sind ja die Kreispunkte einer Fläche im allgemeinen isoliert, dagegen diejenigen in Kurven angeordnet, deren Indikatrix eine gleichseitige Hyperbel ist.

§ 23. Die berührenden Strahlennetze und das berührende Schraubenbüschel.

Die Ergebnisse des § 21 lassen sich wörtlich auf die Umgebungen der regulären Strahlen einer beliebigen Kongruenz übertragen, bei der wir A und B nach § 22 als bekannt betrachten können; denn man kann im Falle (I) (vgl. S. 79) die Gleichungen

$$c\,\mathrm{tg}\varphi = A, \quad c\cot\varphi = -B,$$

im Falle (II) die Gleichungen

$$cm = -A, \qquad \frac{c}{m} = -B$$

reell nach c und φ oder c und m so auflösen, daß diese Größen auch die anderen nach (40) bis (42) angegebenen Bedingungen erfüllen:

$$(54)\quad \begin{cases} c = |\sqrt{-AB}|, \qquad \mathrm{tg}\varphi = \left|\sqrt{-\dfrac{A}{B}}\right|, \\ \mathrm{tg}\,2\varphi = \dfrac{2\sqrt{-AB}}{A+B} \quad \text{(für I)}, \end{cases}$$

$$(55)\qquad c = \sqrt{AB}, \qquad m = \sqrt{\frac{A}{B}} \quad \text{(für II)},$$

$$(56)\qquad K = -\frac{1}{B} \quad \text{(für III)},$$

wobei in (55) das Vorzeichen von c dem gemeinsamen Zeichen von A und B entgegengesetzt zu wählen ist. Also läßt sich immer ein Strahlennetz finden, für welches eins der Gleichungspaare (40)—(42) mit den gegebenen Gleichungen (36) identisch wird. Wenn ein Strahlennetz N und eine beliebige Kongruenz C einen Strahl s und alle Richtungen im Linienraum, die von s ausgehen, gemeinsam haben, so sagen wir, C und N berühren sich in s. Dann können wir das letzte Ergebnis so aussprechen:

Satz 44: Zu jedem regulären nichtzylindrischen Strahl s einer beliebigen Kongruenz C gibt es ein Strahlennetz, das in seinem Hauptstrahl C berührt.

Die Konstanten, die seine Form und Größe bestimmen, sind durch eine der Gleichungsgruppen (54) bis (56) eindeutig bestimmt.

Wir wollen dieses Strahlennetz zum Unterschied von anderen ebenfalls in s berührenden Netzen das Hauptnetz des Strahles s nennen. Je nachdem das Hauptnetz eines Strahles s hyperbolisch, elliptisch oder parabolisch ist, sei s selbst hyperbolisch, elliptisch oder parabolisch genannt. Das zum Hauptnetz gehörige Zylindroid heiße auch Zylindroid des Strahles s; seine äußersten Erzeugenden liegen in den Hauptebenen von s. Die Sätze und Überlegungen des § 21 lassen sich nun mittels des Hauptnetzes auf beliebige Kongruenzen übertragen: Zunächst wollen wir auch hier die Verbindungsebenen der Brennlinien b, b' des Hauptnetzes mit s als Brennebenen, ihre Schnittpunkte mit s als Brennpunkte von s bezeichnen. Aus (36) geht hervor, daß der Halbierungspunkt der Strecke zwischen den Brennpunkten mit dem in § 20 definierten Mittelpunkt identisch ist. Wenn S der Schnittpunkt (s, b) ist, ebenso $S' \equiv (s, b')$, so ist Sb' die Kuspidalebene für solche in C enthaltene Regelflächen, die ihren Kuspidalpunkt im Brennpunkt S haben und umgekehrt. Die beiden Brennebenen sind nicht etwa die durch die Gleichung (44) bestimmten, sondern die darauf senkrechten (vgl. die Überlegung im Anschluß an diese Gleichung). Die parabolischen Strahlen haben nur einen Brennpunkt und eine Brennebene. Alle Regelflächen, die von einem elliptischen Strahle einer Kongruenz ausgehen, sind in der Umgebung dieses Strahles gleich gewunden, weil P nach (36) in diesem Falle immer einerlei Zeichen hat. Darnach nennen wir die Kongruenz selbst an dieser Stelle links oder rechts gewunden, und zwar entspricht der erstere Fall positiven Werten A, B (vgl. § 1).

Unter den hyperbolischen Strahlen sind diejenigen hervorzuheben, bei denen das Hauptnetz rechtwinklig ist; hier wird nach (40) oder (54) $A = -B$, wir finden also die Normalstrahlen des vorigen Paragraphen wieder. Hier liegen die Brennlinien des Hauptnetzes zugleich in den Hauptebenen. Brennpunkte und Grenzpunkte fallen wegen $2\varphi = \frac{\pi}{2}$ zusammen, ebenso Brennebenen und Hauptebenen.

Die Gleichungen (40) nehmen die einfache Gestalt an:

$$z = c \sin 2\alpha\,, \quad P = -c \cos 2\alpha\,. \tag{40a}$$

Unter den elliptischen Strahlen sind diejenigen hervorzuheben, für welche das Hauptnetz ein Rotationsnetz wird ($m=1$). Aus den Gleichungen (41) wird hier:

$$z = 0\,, \quad P = -c\,. \tag{41a}$$

Die Grenzpunkte fallen in den Mittelpunkt zusammen. Wir erkennen hierin die im vorigen Paragraphen definierten isotropen Strahlen.

Wenn in einem regulären Strahl s einer Kongruenz C außer dem Hauptnetz N noch ein anderes Strahlennetz N' berührt, so müssen sich auch N und N' berühren. Wir haben also, um die Frage nach allen berührenden Netzen eines Strahles s zu erledigen, nur die Berührung zweier Strahlennetze N und N', wobei der gemeinsame Strahl für das eine Netz N der Hauptstrahl ist, zu untersuchen, d. h. wir haben für einen beliebigen Strahl s eines Netzes N' das Hauptnetz N zu suchen.

Für die hyperbolischen Netze ist die Frage unmittelbar zu beantworten: Wenn s die Brennlinien b, b' von N' in T, T' schneidet und mit ihnen durch die Ebenen ε, ε' verbunden ist, so lassen sich Regelflächen mit den Kuspidalpunkten T, T' und den Kuspidalebenen ε, ε' bilden; also müssen T, T' die Brennpunkte, ε, ε' die Brennebenen des Strahles s sein und das Hauptnetz ist durch diejenigen Strahlen der Büschel (S, ε'), (S', ε) als Brennlinien definiert, die auf s senkrecht stehen. Umgekehrt wird durch je einen beliebigen Strahl beider Büschel ein allgemeines berührendes Netz definiert, weil alle diese Netze zum selben Hauptnetz zurückführen.

Satz 45: Es gibt in einem regulären Strahl einer Kongruenz ∞^2 berührende Strahlennetze, die alle gleichartig sind*).

Es ist nämlich selbstverständlich, daß ein derartiger Satz von der Realität der Brennpunkte unabhängig ist, wenigstens solange die Konstantenzahl der Netze dieselbe bleibt. Wir wollen ihn aber doch noch auf anderem Wege

*) Nämlich entweder alle hyperbolisch, oder alle elliptisch, oder alle parabolisch.

beweisen, um auch für die elliptischen und parabolischen Strahlen etwas näheres über die Mannigfaltigkeit der berührenden Netze zu erfahren und weil die betreffenden Formeln noch zu anderen Zwecken nützlich sein werden.

Vorher aber werfen wir noch einen Blick auf das andere Hilfsmittel, mit dem man die Umgebung eines Kongruenzstrahles, soweit ihre Eigenschaften von keinen höheren als ersten Ableitungen der Linienzeiger abhängen, ebenfalls beherrschen kann; das ist nämlich die Gesamtheit der in § 20 erwähnten ∞^1 berührenden Schraubenflächen, welche das „berührende Schraubenbüschel $\mathfrak{S}$" ausmachen. Der Strahl s, längs dessen die Berührung stattfindet, soll auch Hauptstrahl von $\mathfrak{S}$ heißen. Für eine berührende Schraubenfläche ist nicht nur $\lim \frac{a}{\omega} = P$, sondern überhaupt (§ 20):

$$\frac{a}{\omega} = P.$$

Wir suchen zunächst diejenigen Regelflächen in $\mathfrak{S}$, die durch $\omega = \text{const.}$ definiert sind, die „Regelflächen konstanter Neigung". Für sie erhält man nach (36):

$$a = \omega(A \sin^2\alpha + B\cos^2\alpha).$$

Dies ist schon (in Polarzeigern α, a) die Gleichung derjenigen Kurve, die entsteht, wenn man alle kürzesten Abstände auf eine zum Hauptstrahl senkrechte Ebene projiziert. Sie ist eine Kurve sechsten Grades (Hensel, J. f. Math., Bd. 102) und wird für den Fall der Normalstrahlen ($A = -B$) zum „Vierblatt":

$$a = B\omega\cos 2\alpha\,.$$

Die Regelfläche konstanter Neigung selbst ist jedoch von der vierten Ordnung (Satz 26), weil sie durch einen unendlich fernen Kreis und die zwei Brennlinien als Leitkurven definiert ist.

Die „Regelflächen konstanten Abstandes" sind durch $a = \text{const.}$ definiert. Wir wollen ihre Leitkurve L in der unendlich fernen Ebene aufsuchen und L durch den Verbindungskegel $\mathfrak{K}$ mit dem Ursprung darstellen. Es ist:

$$\omega = \frac{a}{A\sin^2\alpha + B\cos^2\alpha}.$$

Da aber nur die Umgebung des Hauptstrahles von $\mathfrak{S}$ Beziehung zur berührenden Kongruenz hat, können wir, um Sätze zu finden, die näherungsweise von der Umgebung eines Strahles einer beliebigen Kongruenz gelten, $\operatorname{tg}\omega$ an Stelle von ω schreiben. Setzen wir nun

$$\operatorname{tg}\omega = \sqrt{x^2 + y^2} : z\,,$$

so müssen wir, weil die Projektion eines Strahles und seines kürzesten Abstandes auf eine Normalebene von s selbst zueinander senkrecht sind, setzen:

$$\sin^2\alpha = \frac{x^2}{x^2 + y^2}\,, \qquad \cos^2\alpha = \frac{y^2}{x^2 + y^2}\,,$$

um die Gleichung von $\mathfrak{K}$ zu erhalten:

$$(A\,x^2 + B\,y^2)^2 = a^2(x^2 + y^2)\,z^2\,,$$

wobei a ein kleiner Wert ist. $\mathfrak{K}$ ist also von der vierten und die Regelfläche konstanten Abstandes von der achten Ordnung.

---

§ 24. Die Umgebung beliebiger Strahlen eines Netzes.

a) Wir wenden die Ergebnisse des § 22 auf einen beliebigen Strahl s eines elliptischen Netzes an, wobei wir die einfachste Darstellung zugrunde legen:

$$(57)\qquad \begin{cases} p_1 = u & p_4 = -c\,m\,u \\ p_2 = v & p_5 = -\dfrac{c}{m}\,v \\ p_3 = c & p_6 = m\,u^2 + \dfrac{v^2}{m}\,. \end{cases}$$

In der Tat genügen die p den beiden linearen Gleichungen:

$$(58)\qquad p_4 + c\,m\,p_1 = 0\,, \qquad p_5 + \frac{c}{m}\,p_2 = 0\,.$$

Um die geometrische Bedeutung der Parameter u, v zu erkennen, vergleichen wir diese Darstellung mit der in Bd. I, § 55 gegebenen:

$$(59)\qquad \begin{cases} p_1 = -\dfrac{y}{m} & p_4 = c\,y \\ p_2 = m\,x & p_5 = -c\,x \\ p_3 = c & p_6 = m\,x^2 + \dfrac{y^2}{m}\,, \end{cases}$$

wo x und y die Zeiger des Schnittpunktes von s mit der Mittelebene sind, und finden:

$$(60)\qquad u = -\frac{y}{m}\,, \qquad v = m\,x\,.$$

Nun ergibt § 22:

$$(61)\qquad \begin{cases} R = -c\,m\,, & T = -\dfrac{c}{m}\,, & S = 0\,, \\ U = v^2 + c^2\,, & V = u^2 + c^2\,, & W = -u\,v\,. \end{cases}$$

$$(62)\qquad \begin{cases} A\,B = u^2 + v^2 + c^2\,, \\ A + B = -\dfrac{1}{c}\left[m\,(u^2 + c^2) + \dfrac{1}{m}(v^2 + c^2)\right]. \end{cases}$$

Wir bezeichnen jetzt für das Hauptnetz des Strahles s die Größen c und m mit C und M, während die kleinen Buchstaben eben für den Hauptstrahl des Netzes (wo das Hauptnetz mit dem gegebenen Netz selbst zusammenfällt) vorbehalten bleiben müssen. Bezeichnet man noch zur Abkürzung

$$(63)\qquad m\,(u^2 + c^2) + \frac{1}{m}(v^2 + c^2) = \sigma\,,$$

so folgt aus den Gleichungen (55) und (62), weil A von den beiden durch (62) bestimmten Größen nach § 20 den kleineren absoluten Betrag haben soll:

$$(64)\qquad \begin{cases} C = \sqrt{u^2 + v^2 + c^2}\,, \\ M = \sqrt{\dfrac{\sigma - \sqrt{\sigma^2 - 4c^2(u^2 + v^2 + c^2)}}{\sigma + \sqrt{\sigma^2 - 4c^2(u^2 + v^2 + c^2)}}}\,. \end{cases}$$

Alle Wurzeln sind positiv zu nehmen. Hiermit ist Form und Größe des Hauptnetzes für einen beliebigen Strahl u, v bestimmt.

Stellen wir uns nun auf den Standpunkt des vorigen Paragraphen und denken uns C und M seien die Konstanten des Hauptnetzes eines elliptischen Strahles einer beliebigen Kongruenz, so sehen wir aus den Gleichungen (64) neuerdings, daß es ∞^2 berührende Netze gibt. Denn wenn C und M gegeben sind, können wir von den Größen u, v, c, m zwei, etwa u, v, willkürlich wählen. Dann sind c und σ als wesentlich positive Größen eindeutig bestimmt, nämlich

$$c = \sqrt{C^2 - u^2 - v^2}, \qquad \sigma = C\left(\frac{1}{M} + M\right)\sqrt{C^2 - u^2 - v^2}.$$

Schließlich ist m durch die quadratische Gleichung (63) bestimmt.

Wir suchen jetzt die isotropen Strahlen eines elliptischen Netzes. Die Bedingungen (53) werden hier:

$$u\,v = 0, \qquad m(u^2 + c^2) - \frac{1}{m}(v^2 + c^2) = 0$$

und werden nur erfüllt durch

$$u = 0, \qquad v = c\sqrt{m^2 - 1} \tag{65}$$

oder durch

$$v = 0, \qquad u = \frac{c}{m}\sqrt{1 - m^2}. \tag{65a}$$

Nur das zweite Lösungspaar ist reell.

Satz 46: Ein elliptisches Strahlennetz hat zwei reelle isotrope Strahlen, die nur für ein Rotationsnetz in den Hauptstrahl zusammenrücken.

Aus (60) finden wir die Schnittpunkte der isotropen Strahlen mit der Mittelebene:

$$x = 0, \qquad y = -c\sqrt{1 - m^2}.$$

Sind nun a, b die Halbachsen, e die Exzentrizität irgend einer Ellipse des Satzes 109 (Bd. I), so ist

$$1 - m^2 = \frac{e^2}{a^2}.$$

Also sind nach Bd. I, § 55, c)*) die großen Halbachsen r derjenigen beiden kongruenten Ellipsen E, E', die von den

*) Aus den Gleichungen für $r\cos u$ und $r\sin u$ (a. a. O. S. 180) folgt nämlich, daß der dortige Winkel u gleich 45^0 wird.

isotropen Strahlen getroffen werden:

$$r = \left| \frac{y}{m}\sqrt{2} \right| = \frac{c\,e}{b}\sqrt{2}\,. \tag{66}$$

Hiernach könnte man die isotropen Strahlen konstruieren. Sie treffen sowohl E als E' in den Endpunkten solcher Durchmesser, die ihren konjugierten gleich sind.

Bei einem Rotationsnetz nennen wir r den Abstand des Schnittpunktes eines Strahles mit der Mittelebene vom Hauptstrahl. Dann vereinfachen sich die Gleichungen (64) zu

$$C = \sqrt{r^2 + c^2}\,, \qquad M = \frac{c}{\sqrt{r^2 + c^2}}\,. \tag{64a}$$

b) Bei einem hyperbolischen Netz gehen wir von der Darstellung aus:

$$\begin{cases} p_1 = u & p_4 = c\,u\,\mathrm{tg}\varphi \\ p_2 = v & p_5 = -c\,v\cot\varphi \\ p_3 = c & p_6 = v^2\cot\varphi - u^2\,\mathrm{tg}\varphi\,. \end{cases} \tag{67}$$

Da die Zeiger ξ, η des Schnittpunktes eines Strahles mit der Mittelebene nach Bd. I, § 55, a) durch

$$\xi = \frac{x + x'}{2} = \frac{\delta + \delta'}{2}\cos\varphi$$

usw. gegeben sind, so findet man durch Vergleich der Darstellung (67) mit den Gleichungen (78) in Bd. I, § 55 als geometrische Bedeutung der Parameter u, v:

$$u = \eta\cot\varphi\,, \quad v = \xi\,\mathrm{tg}\varphi \tag{68}$$

oder auch

$$u = \tfrac{1}{2}(\delta' - \delta)\cos\varphi\,, \quad v = \tfrac{1}{2}(\delta' + \delta)\sin\varphi\,. \tag{68a}$$

Nun folgt aus § 22:

$$R = c\,\mathrm{tg}\varphi\,, \quad T = -c\cot\varphi \tag{61a}$$

(die übrigen Größen (61) bleiben unverändert) und analog wie früher aus (52):

$$\begin{cases} AB = -(u^2 + v^2 + c^2)\,, \\ A + B = \dfrac{1}{c}[(u^2 + c^2)\,\mathrm{tg}\varphi - (v^2 + c^2)\cot\varphi]\,, \end{cases} \tag{69}$$

ferner aus (54), wenn

$$(u^2 + c^2)\operatorname{tg}\varphi - (v^2 + c^2)\cot\varphi = \tau$$

gesetzt wird*):

$$C = \sqrt{u^2 + v^2 + c^2}, \tag{70}$$

$$\operatorname{tg} 2\Phi = -\frac{2c}{\tau}\sqrt{u^2 + v^2 + c^2} = -\frac{2cC}{\tau}. \tag{70a}$$

Die Normalstrahlen des Netzes sind durch $\operatorname{tg}\Phi = 1$, also $\tau = 0$ bestimmt. Gehen wir auf die Parameter δ, δ' zurück, so erhalten wir

$$\delta\,\delta' = -4c^2\frac{\cot 2\varphi}{\sin 2\varphi}, \tag{71}$$

also nach Bd. I, Aufgabe (72) ein Hyperboloid.

Satz 47: Die Fläche der Normalstrahlen eines hyperbolischen Netzes ist ein Hyperboloid, das beim rechtwinkligen Netz in zwei Strahlbüschel zerfällt.

c) Für ein parabolisches Netz wählen wir die Darstellung (Bd. I, § 55, d):

$$\begin{cases} q_1 = u & q_4 = 0 \\ q_2 = \cos v & q_5 = -\dfrac{\cos v}{K} \\ q_3 = \sin v & q_6 = \dfrac{\cos^2 v}{K\sin v} \end{cases} \tag{72}$$

und finden mittels

$$\begin{cases} R = S = W = 0, \quad U = 1, \quad V = 1 + u^2, \\ T = -\dfrac{1}{K\sin^2 v}: \end{cases} \tag{61b}$$

$$A = 0, \qquad B = -\frac{1}{K\sin^2 v}. \tag{73}$$

Bezeichnen wir die Konstante K für einen beliebigen Strahl des Netzes mit K', während K für den Hauptstrahl vorbehalten bleibt, so ist nach (56):

$$K' = K\sin^2 v. \tag{74}$$

*) Für $\varphi < 45°$ und $u = v = 0$ wird $\tau < 0$, aber $\operatorname{tg} 2\Phi = \operatorname{tg} 2\varphi > 0$; dadurch rechtfertigt sich das Minuszeichen in (70a).

Satz 48: Alle Strahlen eines parabolischen Netzes, die demselben Büschel angehören, haben kongruente Umgebungen (mit Ausnahme der Brennlinie).

Wollen wir also für einen parabolischen Strahl, dessen Brennebene β, Brennpunkt B und dessen Wert K' gegeben sind, ein berührendes Netz finden (das auch parabolisch sein muß), so können wir seine Brennlinie innerhalb des Büschels (B, β) und eine der Größen K, v beliebig wählen, worauf die andere durch (74) bestimmt ist. Von v hängt die Entfernung zwischen B und dem Mittelpunkt des berührenden Netzes ab.

---

§ 25. Die Mittelfläche, die Mitteleinhüllende und die Grenzfläche einer Kongruenz.

Der Ort der Mittelpunkte aller Strahlen einer Kongruenz heißt Mittelfläche der Kongruenz, der Ort der Grenzpunkte heißt Grenzfläche. Um diese beiden Flächen zu bestimmen, wollen wir zunächst für die Regelflächen einer beliebigen Fortschreitungsrichtung λ den Zentralpunkt bestimmen. Es hat keine Schwierigkeit, die Gleichung (17a) des § 2 auf den Fall auszudehnen, daß die Zeiger p Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlichen sind; für den Fall zweier solchen u, v haben wir (vgl. die Bezeichnungen in § 22)

$$\mathfrak{u}\, p_{\nu u} + \mathfrak{v}\, p_{\nu v}$$

statt jedes Symbols p'_ν in (17a) einzuführen, setzen wieder $\frac{\mathfrak{v}}{\mathfrak{u}} = \lambda$ und finden, wenn

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ p_{1u} & p_{2u} & p_{3u} \\ p_4 & p_5 & p_6 \end{vmatrix} = D(u), \quad \text{analog } D(v)$$

bezeichnet wird:

$$(75) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{A_0 + A_1\lambda + A_2\lambda^2}{N_0 + 2N_1\lambda + N_2\lambda^2}, \\ y = \dfrac{B_0 + B_1\lambda + B_2\lambda^2}{N_0 + 2N_1\lambda + N_2\lambda^2}, \end{cases} \qquad z = \ldots$$

wobei

$$N_0 = \sum_{i=1}^{3} p_{iu}^2, \qquad N_1 = \sum_{i=1}^{3} p_{iu} p_{iv}, \qquad N_2 = \sum_{i=1}^{3} p_{v}^2 .$$

$$A_0 = p_{2u} p_{6u} - p_{3u} p_{5u} - p_{1u} D(u),$$

$$A_1 = p_{2u} p_{6v} + p_{2v} p_{6u} - p_{3u} p_{5v} - p_{3v} p_{5u} - p_{1u} D(v) - p_{1v} D(u),$$

$$A_2 = p_{2v} p_{6v} - p_{3v} p_{5v} - p_{1v} D(v).$$

B_0 geht aus A_0 durch Vertauschung der Marken innerhalb der Zyklen 1, 2, 3 und 4, 5, 6 hervor, usw. Die Grenzpunkte können wir aus der Bedingung bestimmen, daß für sie die Gleichungen (75) eine Doppelwurzel λ haben müssen (man denke an das Zylindroid des betreffenden Strahles), also:

$$4(A_2 - x N_2)(A_0 - x N_0) - (A_1 - 2x N_1)^2 = 0 . \tag{75a}$$

Durch Auflösung dieser Gleichung kann man die ersten Zeiger x_1, x_2 der Grenzpunkte finden; wir werden jedoch bald einen übersichtlicheren Ausdruck dafür aufstellen, und entnehmen daher nur die Zeiger ξ, η, ζ des Mittelpunktes:

$$\begin{cases} \xi = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{A_0 N_2 + A_2 N_0 - A_1 N_1}{2(N_0 N_2 - N_1^2)}, \\ \eta = \dfrac{B_0 N_2 + B_2 N_0 - B_1 N_1}{2(N_0 N_2 - N_1^2)}, \qquad \zeta = \ldots \end{cases} \tag{76}$$

Hiermit ist eine Parameterdarstellung der Mittelfläche gegeben, die zur Voraussetzung hat, daß die Zeiger p so geschrieben sind, daß

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1 \tag{77}$$

ist. Wir wollen die Formeln (76) am Falle der Strahlennetze prüfen und für das elliptische Netz bestätigen, daß die Mittelfläche mit der Mittelebene identisch ist. Hierzu wählen wir die Darstellung (§ 21):

$$\begin{cases} p_1 = u & p_4 = -c\,m\,u \\ p_2 = v & p_5 = -\dfrac{c}{m} v \\ p_3 = \sqrt{1 - u^2 - v^2} = w & p_6 = \dfrac{1}{w}\left(c\,m\,u^2 + \dfrac{c}{m} v^2\right). \end{cases} \tag{78}$$

Es ist

$$D(u) = -\frac{cv}{mw}, \qquad D(v) = \frac{cmu}{w},$$

$$N_0 = \frac{1-v^2}{w^2}, \qquad N_1 = \frac{uv}{w^2}, \qquad N_2 = \frac{1-u^2}{w^2},$$

$$C_0 = -\frac{cuv}{mw^2}, \qquad C_1 = cm \cdot \frac{1-v^2}{w^2} - \frac{c}{m} \cdot \frac{1-u^2}{w^2},$$

$$C_2 = \frac{cmuv}{w^2},$$

also in der Tat $\zeta = 0$.

Der halbe Abstand h der beiden Grenzpunkte ist zugleich die halbe Höhe des zum Hauptnetz des betreffenden Strahles gehörigen Zylindroids und kann daher aus (43) berechnet werden, wenn man die Werte c, φ, m, K aus (54) bis (56) entnimmt. Man findet so (oder aus (36) unmittelbar):

$$h = \left| \frac{A-B}{2} \right| \tag{79}$$

und kann daraus eine explizite Darstellung der Grenzfläche zusammenstellen, die auch an die Bedingung (77) gebunden ist*):

$$x = \xi \pm h p_1, \quad y = \eta \pm h p_2, \quad z = \zeta \pm h p_3. \tag{80}$$

Dabei sind die Werte ξ, η, ζ aus (76), der Wert h nach (79) und (52) aus

$$h = \frac{\sqrt{(UT - 2WS + VR)^2 - 4(RT - S^2)(UV - W^2)}}{2(UV - W^2)} \tag{79a}$$

zu entnehmen. Die oberen Zeichen entsprechen dem einen, die unteren dem anderen Mantel der Grenzfläche.

Wir besprechen noch kurz die Mitteleinhüllende oder Mittelenveloppe**) einer Kongruenz; darunter ver-

*) Läßt man diese Bedingung fallen, so tritt in (79a) rechts der Faktor p^2 hinzu, also in den zweiten Gliedern rechts in (80) bloß der Faktor p.

**) Dieser Begriff stammt von Ribaucour, der gezeigt hat, daß die Mitteleinhüllende einer isotropen Kongruenz eine Minimalfläche ist (Mém. couronn. et des sav. étr. Acad. Belg. T. 44, 1882 oder Bianchi-Lukat, Vorl. über Differentialgeom., § 147).

steht man die Einhüllende der Mittelebenen aller Strahlen der Kongruenz. Man hat zu ihrer Bestimmung aus der Gleichung

$$p_1(x-\xi)+p_2(y-\eta)+p_3(z-\zeta)=0\,, \tag{81}$$

wobei ξ, η, ζ die Werte (76) sind, und aus den partiellen Ableitungen dieser Gleichung nach u und v diese Parameter zu eliminieren. Wir führen die Rechnung für das elliptische Netz durch. Hier wird nach Bd. I, § 55 (Gleichung (83a)) aus (81):

$$-v(x-u)+m^2u(y-v)+cmz=0$$

und die erwähnte Elimination ergibt:

$$mxy+cz(1-m^2)=0\,.$$

Analoges zeigt sich beim hyperbolischen Netz, nämlich:

Satz 49: Die Mitteleinhüllende eines Strahlennetzes ist ein gleichseitiges hyperbolisches Paraboloid*).

Nur für das Rotationsnetz und das parabolische Netz artet die Mitteleinhüllende in leicht ersichtlicher Weise aus.

---

§ 26. Die Grenzflächen der Strahlennetze.

Aus (79), (62), (69) und (73) kann der Wert h für die Strahlennetze berechnet werden und man findet für die elliptischen, hyperbolischen und parabolischen Netze der Reihe nach

$$\begin{cases} h=\dfrac{1}{2c}\sqrt{\sigma^2-4c^2(u^2+v^2+c^2)}\,, \\ h=\dfrac{1}{2c}\sqrt{\tau^2+4c^2(u^2+v^2+c^2)}\,, \qquad h=\dfrac{1}{2K\sin^2 v}\,. \end{cases} \tag{82}$$

Da die Mittelfläche bei den elliptischen und hyperbolischen Netzen mit der XY-Ebene identisch ist, bei den parabolischen sich auf die Brennlinie reduziert, so kann man die Zeiger eines Punktes der Grenzfläche leicht nach (80) zusammenstellen:

*) Sturm, Liniengeometrie, Bd. I, S. 167.

a) Für das elliptische Netz findet man die Parameterdarstellung der Grenzfläche:

$$(83)\qquad X=\frac{v}{m}\pm\frac{u\,h}{w},\qquad Y=-m\,u\pm\frac{v\,h}{w},\qquad Z=\pm\frac{c\,h}{w},$$

wobei h der erste der Werte (82) und

$$w=\sqrt{u^2+v^2+c^2},\qquad \sigma=m\,(u^2+c^2)+\frac{1}{m}\,(v^2+c^2)$$

ist. Führt man statt u, v nach (60) die Zeiger x, y des Schnittes eines Strahles mit der Mittelebene als Parameter ein, so findet man:

$$(84)\qquad X=x\mp\frac{y\,h}{m\,w},\qquad Y=y\pm\frac{m\,x\,h}{w},\qquad Z=\pm\frac{c\,h}{w},$$

wobei jetzt

$$w=\sqrt{m^2x^2+\frac{y^2}{m^2}+c^2},\qquad \sigma=m\,(c^2+x^2)+\frac{1}{m}\,(c^2+y^2)$$

ist. Wir diskutieren das Ergebnis nur für den einfachsten Fall des Rotationsnetzes ($m=1$); hier wird

$$(85)\qquad h=\frac{u^2+v^2}{2\,c}=\frac{x^2+y^2}{2\,c}.$$

Es genügt, die Strahlen zu betrachten, die etwa die X-Achse schneiden; sie bilden wegen

$$\frac{y}{z}=\frac{p_2}{p_3}=\frac{v}{c}=\frac{x}{c}$$

das gleichseitige hyperbolische Paraboloid:

$$(86)\qquad c\,y=x\,z\,.$$

Man entnimmt nun aus (85) den Satz:

Satz 50: Begrenzt man eine Schar von Parallelen zur Z-Achse in der XZ-Ebene durch die beiden Parabeln

$$2\,c\,z=\pm x^2\,,$$

dreht dann jede so erhaltene Strecke um die X-Achse so, daß die Strecken auf das Paraboloid (86) zu liegen kommen, so bilden ihre Endpunkte eine Kurve C auf der Grenzfläche eines Rotationsnetzes.

Die Zeiger eines Punktes von C sind nach (84):

$$(87)\quad X = x\,, \qquad Y = \frac{x^3}{2c\sqrt{c^2+x^2}}\,, \qquad Z = \frac{x^2}{2\sqrt{c^2+x^2}}\,.$$

Um hieraus die Meridiankurve der Grenzfläche zu finden, berechnen wir

$$\xi^2 = X^2 + Y^2 = x^2\left(1 + \frac{Z^2}{c^2}\right), \qquad \zeta^2 = Z^2 = \frac{x^4}{4(c^2+x^2)}$$

und eliminieren x:

$$(88)\qquad c^2\,\xi^4 = 4(\xi^2+\zeta^2+c^2)(\zeta^2+c^2)\zeta^2\,.$$

Man braucht nur $\xi^2+\eta^2$ statt ξ^2 zu schreiben, um die Gleichung der Grenzfläche selbst zu erhalten:

$$(89)\quad c^2(\xi^2+\eta^2)^2 = 4(\xi^2+\eta^2+\zeta^2+c^2)(\zeta^2+c^2)\zeta^2\,.$$

Satz 51: Die Grenzfläche eines Rotationsnetzes ist von der sechsten Ordnung und besteht aus zwei kongruenten Schalen, welche die Mittelebene im Mittelpunkt des Netzes berühren.

b) Für das hyperbolische Netz findet man als Parameterdarstellung der Grenzfläche:

$$(90)\quad X = v\cot\varphi \pm \frac{u\,h}{w}\,, \qquad Y = u\,\mathrm{tg}\,\varphi \pm \frac{v\,h}{w}\,, \qquad Z = \pm\frac{c\,h}{w}\,,$$

wobei h der zweite Wert (82) ist und

$$w^2 = u^2+v^2+c^2\,, \qquad \tau = (u^2+c^2)\,\mathrm{tg}\,\varphi - (v^2+c^2)\cot\varphi\,.$$

Führt man statt u, v nach (68) die Zeiger x, y des Schnittes eines Strahles mit der Mittelebene als neue Parameter ein, so erhält man:

$$(90a)\quad X = x \pm \frac{y\,h}{w}\cot\varphi\,, \qquad Y = y \pm \frac{x\,h}{w}\,\mathrm{tg}\,\varphi\,, \qquad Z = \pm\frac{c\,h}{w}\,,$$

wobei jetzt

$$w^2 = x^2\,\mathrm{tg}^2\varphi + y^2\cot^2\varphi + c^2\,, \quad \tau = y^2\cot\varphi - x^2\,\mathrm{tg}\,\varphi - 2c^2\cot 2\varphi\,.$$

c) Bei einem parabolischen Netz liegen nach Satz 48 die Grenzpunkte der Strahlen desselben Büschels auf einem Kreis. Um zu erfahren, wie sein Halbmesser h mit dem Abstand x seines Mittelpunktes vom Ursprung wächst, haben wir aus der dritten Gleichung (82) und aus $\cot v = Kx$

(vgl. Bd. I, § 55, d) das v zu eliminieren:

$$h - \frac{1}{2K} = \frac{K}{2} x^2 . \tag{91}$$

Satz 52: Faßt man alle Strahlen eines parabolischen Netzes heraus, welche die Brennlinie senkrecht schneiden, dreht sie um diese, bis sie in dieselbe Ebene kommen, so liegen ihre Grenzpunkte auf der Parabel (91) und der hierzu bezüglich der X-Achse symmetrischen.

Um die Gleichung der Grenzfläche zu erhalten, hat man aus den Gleichungen des beweglichen Kreises

$$\left(\xi - \frac{\cot v}{K}\right)^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{1}{4K^2 \sin^4 v}, \qquad \frac{\zeta}{\eta} = \operatorname{tg} v$$

das v zu eliminieren, was eine Gleichung sechsten Grades ergibt.

Diese lautet, wenn $\frac{1}{K} = c$ gesetzt wird:

$$(x z - c y)^2 z^2 + (y^2 + z^2) z^4 = \frac{c^2}{4} (y^2 + z^2)^2 . \tag{92}$$

Für die Fläche (92) ist die X-Achse eine vierfache Linie, durch die jedoch nur zwei reelle Mäntel gehen*). Im Ursprung fallen zwei biplanare Knotenpunkte zusammen.

Satz 53: Die Grenzfläche eines parabolischen Netzes ist eine Fläche sechster Ordnung, die durch Bewegung eines Kreises von veränderlichem Halbmesser erzeugt werden kann.

Die Grenzfläche eines allgemeinen Strahlennetzes ist von der zehnten Ordnung (Anh., Aufg. 21) und reduziert sich außer in den beiden hier behandelten Fällen nur noch im Falle eines rechtwinkligen Netzes auf die sechste Ordnung.

---

§ 27. Die Brennfläche und die abwickelbaren Flächen einer Kongruenz.

Der Ort der Brennpunkte aller Strahlen einer Kongruenz heißt Brennfläche. Wir gehen wieder von der Darstellung (45) aus. Das c des § 23 ist bei den hyper-

*) Ein Modell der Fläche ist im Verlag von Martin Schilling (Halle a. S.) erschienen.

bolischen Hauptnetzen zugleich die halbe Distanz der Brennpunkte, also nach (52) und (54):

$$c = p^2 \sqrt{\frac{S^2 - RT}{UV - W^2}} \tag{93}$$

und man kann von der Mittelfläche ausgehend analog wie bei der Grenzfläche (§ 25) auch eine Darstellung der Brennfläche aufschreiben:

$$X = \xi \pm \frac{c}{p} p_1, \qquad Y = \eta \pm \frac{c}{p} p_2, \quad \ldots \tag{94}$$

Hierbei sind ξ, η, ζ aus (76), c aus (93) zu entnehmen.

Durch eine Beziehung $\chi(u, v) = 0$ zwischen den Parametern oder auch

$$u = \varphi(t), \quad v = \psi(t) \tag{95}$$

wird eine Regelfläche $\mathfrak{R}$ aus der Kongruenz herausgehoben. Insbesondere nennen wir die Flächen, längs deren u allein sich ändert, die u-Flächen; sie sind also durch $v = \text{const.}$ definiert, analog die v-Flächen durch $u = \text{const.}$ Beide zusammen heißen Parameterflächen.

Wir versuchen jetzt die Beziehung (95) so zu wählen, daß $\mathfrak{R}$ abwickelbar wird. Hierzu muß nach § 4

$$\omega(p') = \sum_1^3 p'_\nu p'_{\nu+3} = 0$$

sein. Wenn nun die Striche Ableitungen nach t bedeuten, so wird diese Gleichung:

$$R u'^2 + 2S u' v' + T v'^2 = 0, \tag{96}$$

wobei R, S, T dieselbe Bedeutung wie in § 22 haben. Übrigens entsteht diese Gleichung auch unmittelbar aus (46), wenn man $P = 0$ und $\lambda = \frac{dv}{du}$ setzt. Da dieselbe Beziehung zwischen u und v in mannigfacher Art durch eine Hilfsveränderliche t vermittelt werden kann, so liegt es in der Natur der Sache, daß man die eine der beiden Größen u, v (z. B. u) als Funktion von t beliebig wählen kann, etwa $u = t$, worauf sich für die andere v durch Auflösung einer quadratischen Gleichung eine Differentialgleichung von der Form

$$v' = f(u, v) \tag{97}$$

ergibt. In der Umgebung solcher Stellen, in denen die beiden Zweige der Funktion f regulär und getrennt sind, gibt es nach dem Existenztheorem über die Integrale von Differentialgleichungen zwei Integrale der Gleichung (97) mit je einer willkürlichen Konstanten, die aber nicht reell sein müssen.

Satz 54: In denjenigen Gebieten einer Kongruenz, wo

$$S^2 - RT > 0$$

ist, lassen sich die Strahlen in zweifacher Art zu Scharen von je ∞^1 abwickelbaren Flächen anordnen.

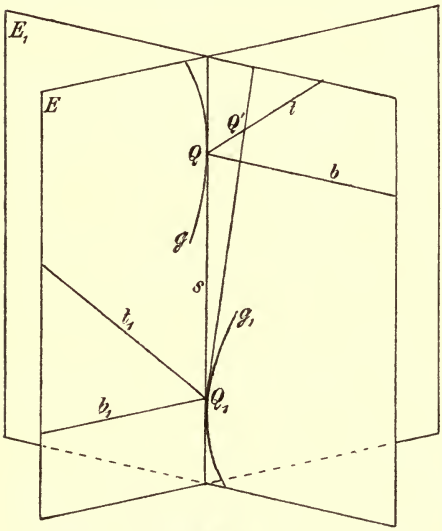

Fig. 8.

$T = 0$ bedeutet, daß die v-Flächen abwickelbar sind, denn dann ist $u = \text{const.}$ ein Integral von (96). Also ist $R = T = 0$ die Bedingung dafür, daß die Parameterflächen mit den abwickelbaren identisch sind. Da $UV - W^2$ stets positiv ist (§ 22), so sind die abwickelbaren Flächen nach (93) genau im selben Gebiet reell, in dem die Hauptnetze hyperbolisch sind und nachdem in diesem Gebiet die Existenz der abwickelbaren Flächen sichergestellt wurde, ist auch ihre Beziehung zur Brennfläche leicht zu erkennen: Sei $\mathfrak{G}$ eine Gratlinie einer abwickelbaren Fläche $\mathfrak{A}$ der Kongruenz (Fig. 8), s eine Tangente von $\mathfrak{G}$, Q ihr Berührungspunkt, E die Schmiegungsebene von $\mathfrak{G}$ in Q. Dann ist der Verteilungsparameter P für die Fläche $\mathfrak{A}$ gleich Null; E muß also als Kuspidalebene nach § 23 mit einer der schon dort definierten Brennebenen identisch sein. Sei $\mathfrak{G}_1$ die Gratlinie der anderen abwickelbaren

Fläche, der s noch angehört, Q_1 der Berührungspunkt von s mit $\mathfrak{G}_1$ und E_1 die Schmiegungsebene. Dann ist E_1 die zweite Brennebene von s und Q, Q_1 sind die Brennpunkte. Bewegen wir den Strahl s so, daß er Tangente an $\mathfrak{G}_1$ bleibt, so ist Q_1 das Momentanzentrum seiner Drehung in der Schmiegungsebene E_1. Es hat also auch der andere auf s gelegene Brennpunkt Q einen Geschwindigkeitsvektor $QQ' \equiv t$ in E_1, d. h. die Ebene E_1 berührt die Brennfläche in Q, weil sie zwei Tangenten s und t derselben enthält. Ebenso berührt E in Q_1 den anderen Mantel und t_1 habe die analoge Bedeutung wie t.

Satz 55: Die Gratlinien der beiden Scharen abwickelbarer Flächen einer Kongruenz erfüllen je einen Mantel der Brennfläche, die von jedem Kongruenzstrahl in seinen beiden Brennpunkten berührt wird. Jede Brennebene berührt den einen Mantel in einem Brennpunkt und ist im anderen Brennpunkt Schmiegungsebene der auf dem anderen Mantel gelegenen Gratlinie; die Brennfläche ist also auch Einhüllende der Brennebenen.

Man kann sich nun so eine anschauliche Vorstellung von der zweifachen Anordnung der Kongruenzstrahlen nach abwickelbaren Flächen machen: Man gehe von einer beliebigen Fläche F aus und überdecke sie einfach mit einem beliebigen Kurvensystem $C_1, C_2, C_3 \ldots$ (Fig. 9). Die Gesamtheit der Tangenten der Kurven C bildet eine Kongruenz $\mathfrak{C}$, die bereits vermöge dieser Kurven selbst in ∞^1 abwickelbare Flächen zerlegt ist. Es fragt sich: Wie können ihre Strahlen noch anders zu abwickelbaren Flächen $\mathfrak{A}$ zusammengefaßt werden? Die Berührungspunkte der Strahlen einer solchen Fläche $\mathfrak{A}$ mit F bilden eine Kurve Γ_1 auf F. Die Berührungsebenen E von F in den Punkten von Γ_1 sind auch die Berührungsebenen von $\mathfrak{A}$. Die Fläche $\mathfrak{A}$ kann also durch eine Ebene E erzeugt werden, die sich so auf F wälzt, daß sie stets in einem Punkte von Γ_1 berührt. Nun erinnern wir uns des Satzes der Flächentheorie (vgl. z. B. Scheffers, Theorie der Flächen, S. 154 oder Bianchi-Lukat, S. 107), daß die Grenzlage der Verbindungslinie zweier benachbarter Flächenpunkte und der Schnittlinie ihrer beiden Berührungsebenen zueinander konjugiert sind. Damit also durch Wälzung von E eine in $\mathfrak{C}$ enthaltene

Regelfläche entsteht, ist es notwendig und hinreichend die Kurve Γ_1 zum System der C konjugiert zu wählen.

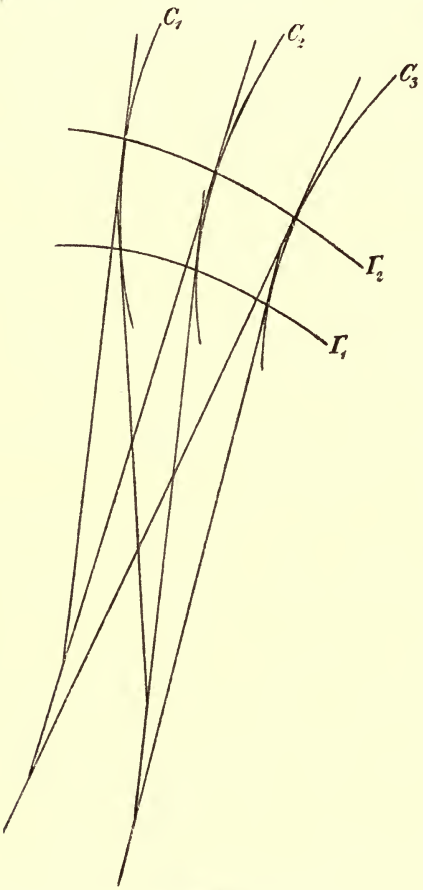

Fig. 9.

Satz 56: Auf jedem Mantel der Brennfläche sind die Gratlinien der einen Schar abwickelbarer Flächen konjugiert zu denjenigen Kurven, in denen die abwickelbaren Flächen der anderen Schar denselben Mantel berühren.

Wir wissen aus § 23, daß je ein Strahl der Büschel (Q, E_1) und (Q_1, E) zusammen ein berührendes Strahlennetz definieren. Alle diese Netze sind einander äquivalent, solange es sich nur um Eigenschaften handelt, die von keinen höheren als den ersten Ableitungen der Linienzeiger nach den Parametern abhängen und wir haben nur der Anschaulichkeit halber das Hauptnetz bevorzugt, dessen Brennlinien b, b_1 auf s senkrecht stehen. Geht man aber zu Eigenschaften über, die auch von höheren Ableitungen abhängen, so ist dasjenige Strahlennetz ausgezeichnet, das t, t_1 (Tangenten der Kurven Γ) zu Brennlinien hat.

Wir haben bisher vorausgesetzt, daß die abwickelbaren Flächen der Kongruenz eigentliche Gratlinien haben. Es

ist aber nicht ausgeschlossen, daß die eine oder beide Scharen in Kegelflächen ausarten. Im ersten Fall tritt eine Kurve C (der Ort der Spitzen der Kegel) an Stelle des einen Mantels der Brennfläche und die Kongruenz besteht aus den Tangenten, die aus den Punkten von C an eine Fläche F (den anderen Mantel der Brennfläche) gezogen werden können. Für diesen Mantel gilt unverändert der Satz 56. Die Kurve C kann auch im Unendlichen liegen; dann erhalten wir zylindrische Kongruenzen. Für sie gilt ja unverändert der Existenzbeweis der abwickelbaren Flächen, so daß auch umgekehrt alle zylindrischen Kongruenzen (bis auf den später erwähnten Spezialfall) so erhalten werden, d. h. aus den Strahlen von ∞^1 Zylindern zusammengesetzt werden können, die derselben Fläche umschrieben sind.

Wir können jetzt eine Bemerkung über die berührenden Strahlennetze der zylindrischen Kongruenzen nachtragen: Wir haben zwar diese Netze ursprünglich metrisch definiert, sehen aber, daß sie durch die Büschel (Q, E_1) und (Q_1, E) in projektiv invarianter Weise erhalten werden können, weshalb die Übertragung auf die zylindrischen Kongruenzen nahe liegt: Es rückt nur der Scheitel Q des einen Büschels (Q, E_1) ins Unendliche. Man sieht also, daß die berührenden Netze keineswegs bloß solche mit einer unendlich fernen Brennlinie sind, sondern auch solche mit zwei endlichen Brennlinien, von denen aber die eine dem betrachteten Strahl s parallel ist. Es bedarf freilich noch der Bestätigung durch die Rechnung (§ 34), daß diese Übertragung auch der ursprünglichen Definition der berührenden Netze durch die gemeinsamen Fortschreitungsrichtungen im Linienraum gerecht wird.

Wenn endlich beide Mäntel der Brennfläche in Kurven zusammenschrumpfen, so besteht die Kongruenz aus den Treffgeraden zweier Kurven oder den Bisekanten einer einzigen Kurve. Auch hier kann die eine Kurve unendlich fern sein (was einen Spezialfall der zylindrischen Kongruenzen ergibt) oder beide können in eine zusammenfallen, die von den Kongruenzstrahlen im allgemeinen nur einmal getroffen wird (§ 53, h).

Jede Kongruenz, die überhaupt reelle abwickelbare Flächen enthält, läßt sich durch Angabe der Gratlinien vollkommen bestimmen und zwar genügt hierzu die Kenntnis

der einen Schar C_1, C_2, C_3 . . . Nun fällt die andere Schar dann und nur dann mit der ursprünglichen zusammen, wenn wir als das System der Kurven C die eine Schar der Haupttangentenkurven (asymptotischen Linien) der Fläche F wählen, weil nur diese mit ihren konjugierten zusammenfallen. Dann gibt es für jeden Kongruenzstrahl nur einen Brennpunkt und eine Brennebene. Alle Strahlen der Kongruenz sind parabolisch, weshalb wir diese selbst parabolisch nennen und das Ergebnis kurz so aussprechen können (Klein, Math. Ann. Bd. V., S. 290):

Satz 57: Alle parabolischen Kongruenzen mit eigentlichen Brennflächen bestehen aus den Tangenten der einen Schar von asymptotischen Linien einer Fläche und umgekehrt: Jede solche Kongruenz ist parabolisch. Für diese Kongruenzen gilt überall:

$$S^2 - RT = 0 .$$

---

§ 28. Die Hauptflächen und die Krümmungsflächen einer Kongruenz.

Bei Untersuchung der Umgebung eines Kongruenzstrahls s haben wir zwei ausgezeichnete Stellungen durch s unterschieden, die Hauptebenen (§ 20), sowie zwei andere: die Krümmungsebenen (§ 22). Nun bezeichnen wir diejenigen Regelflächen, deren Zentraltangenten immer in eine Krümmungsebene des zugehörigen Strahls fallen, als „Krümmungsflächen", diejenigen, deren Zentraltangenten immer in eine Hauptebene fallen, als „Hauptflächen". Dann folgt unmittelbar aus den angegebenen Stellen:

Satz 58: Die Striktionslinien der beiden Scharen von Hauptflächen liegen auf der Grenzfläche, die der beiden Scharen von Krümmungsflächen auf der Mittelfläche der Kongruenz.

Die Krümmungsflächen folgen stets denjenigen Fortschreitungsrichtungen der Kongruenz, in welchen der Verteilungsparameter, folglich auch das Krümmungsmaß im Zentralpunkt extreme Werte hat, und zwar sind diese Extreme des Parameters bei hyperbolischen Strahlen ungleich bezeichnet, die des Krümmungsmaßes aber trotzdem beide

negativ und beide Minima; daneben tritt für die abwickelbaren Flächen noch das Maximum Null auf. Bei den elliptischen Strahlen sind die beiden Extreme des Parameters gleich bezeichnet, die des Krümmungsmaßes beide negativ (ein Maximum und ein Minimum).

Gleichung (50) ist schon die Differentialgleichung der Krümmungsflächen, wenn man $\frac{dv}{du}$ für λ schreibt:

$$(98)\quad \left(\frac{dv}{du}\right)^2 (WT - VS) + \frac{dv}{du}(UT - VR) + (US - WR) = 0.$$

Ähnlich wie bei Gleichung (96) schließt man: Wenn die Krümmungsflächen zugleich Parameterflächen sind (wir sagen auch, wenn die Kongruenz „auf die Krümmungsflächen bezogen ist"), so muß sein:

$$TW - VS = 0, \quad RW - US = 0.$$

Da aber die Determinante $TU - VR$ dieser Gleichungen als von Null verschieden vorausgesetzt werden kann (sonst kämen wir nur auf den Spezialfall der isotropen Kongruenzen), so folgt:

Satz 59: Das Kennzeichen dafür, daß eine Kongruenz auf ihre Krümmungsflächen bezogen ist, lautet*):

$$(99)\quad S = W = 0.$$

Um die Differentialgleichung der Hauptflächen zu finden, bemerken wir, daß für dieselben aus (36) folgt:

$$P = \tfrac{1}{2}(A + B).$$

Setzen wir diesen Wert aus (52) in (46) ein, so erhalten wir als Differentialgleichung der Hauptflächen $\left(\lambda = \frac{dv}{du}\right)$:

$$(100)\quad \begin{cases} (UT - 2WS + VR)(U + 2W\lambda + V\lambda^2) \\ \quad = 2(UV - W^2)(R + 2S\lambda + T\lambda^2). \end{cases}$$

Man sieht hieraus, daß für die Normalenkongruenzen, wie es selbstverständlich ist, die Hauptflächen mit den abwickel-

*) Man sieht die Analogie mit dem Falle, daß eine Fläche auf ihre Krümmungslinien bezogen ist, wodurch sich der Name „Krümmungsflächen" neuerdings rechtfertigt.

baren zusammenfallen. Wenn die Krümmungsflächen Parameterflächen sind, wird aus (100):

$$\lambda^2 = \frac{U}{V}. \tag{100a}$$

Wenn die Hauptflächen Parameterflächen sind, so muß sein:

$$\begin{cases} U(UT - 2WS + VR) = 2R(UV - W^2) \\ V(UT - 2WS + VR) = 2T(UV - W^2). \end{cases} \tag{101}$$

Wenn gleichzeitig

$$W = S = 0, \quad UT - 2WS + VR = 0,$$

so haben wir Normalenkongruenzen vor uns, die auf ihre abwickelbaren Flächen bezogen sind. Wenn wir nun von diesem Fall absehen, folgt:

$$\frac{R}{U} = \frac{T}{V} = \mu$$

und dann aus jeder der Gleichungen (101):

$$UW(-S + \mu W) = 0.$$

Diese Bedingung kann entweder durch $\frac{S}{W} = \mu$ erfüllt sein, was aber nur auf den Fall der isotropen Kongruenzen führt, oder durch $W = 0$; also folgt:

Satz 60: Das Kennzeichen dafür, daß eine Kongruenz auf ihre Hauptflächen bezogen ist, lautet:

$$W = 0, \quad R : U = T : V. \tag{102}$$

Es liegt die Frage nahe, welche Bedeutung die Gleichung $W = 0$, die den Bedingungen (99) und (102) gemeinsam ist, für sich allein hat: Die Determinanten der Matrix

$$\begin{matrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ p_{1u} & p_{2u} & p_{3u} \end{matrix}$$

sind nach § 2 den Zeigern der asymptotischen Ebene der u-Fläche proportional. Im Falle $W = 0$ stehen also die asymptotischen Ebenen der u-Fläche und der v-Fläche durch den betreffenden Strahl aufeinander senkrecht, oder, was dasselbe ist:

Satz 61: Die Bedingung $W = 0$ bedeutet, daß die Zentralebenen der Parameterflächen sich senkrecht schneiden.

Wir nennen solche Parameterflächen, wenn dies überall geschieht, quasiorthogonal. Analog gebrauchen wir im Anschluß an § 20 die Ausdrücke „komplementäre“ und „symmetrische“ Parameterflächen; bei der letzten Bezeichnung ist wohl kaum das Mißverständnis zu befürchten, als ob eine wirkliche Symmetrieebene vorhanden wäre. Es ist nun von vornherein klar, daß die Bedingung $W = 0$ sowohl bei Beziehung der Kongruenz auf die Krümmungsflächen, als auch auf die Hauptflächen auftreten muß.

Wir betrachten als Beispiel das Rotationsnetz. Zunächst wird für ein allgemeines elliptisches Strahlennetz die Differentialgleichung der Krümmungsflächen nach (98) und (61):

$$\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + \frac{m^2(u^2+c^2) - (v^2+c^2)}{uv} \cdot \frac{dv}{du} - m^2 = 0\,,$$

also für das Rotationsnetz ($m = 1$):

$$\frac{dv}{du} = \frac{v}{u} \quad \text{oder} \quad = -\frac{u}{v}\,.$$

Dies gibt integriert die beiden Kurvenscharen in der Mittelebene:

$$\frac{v}{u} = \text{const.}, \qquad u^2 + v^2 = \text{const.},$$

daher, wie vorauszusehen:

Satz 62: Die Krümmungsflächen eines Rotationsnetzes sind die Rotationshyperboloide und die durch den Hauptstrahl gehenden gleichseitigen Paraboloide.

Um jetzt das Rotationsnetz auf seine Krümmungsflächen zu beziehen, brauchen wir nur in den Gleichungen (83) des § 55 (Bd. I) $m = 1$ zu setzen.

Schreiben wir noch v statt r, u statt $u - \frac{\pi}{4}$ und dividieren durch $\sqrt{2}$, so kommt:

$$(103) \qquad \begin{cases} p_1 = -v\cos u\,, & p_4 = cv\cos u\,, \\ p_2 = -v\sin u\,, & p_5 = cv\sin u\,, \\ p_3 = c\sqrt{2}\,, & p_6 = \dfrac{v^2}{\sqrt{2}}\,. \end{cases}$$

Jetzt bedeuten u, v nicht mehr wie früher rechtwinklige, sondern Polarzeiger in der Mittelebene. Es bestätigt sich zunächst: $W = S = 0$; ferner ist:

$$\text{(103a)} \qquad \begin{cases} R = -c\,v^2\,, & T = -c\,, \\ U = v^2(v^2 + 2\,c^2)\,, & V = 2\,c^2\,, \end{cases}$$

also nach (100a) die Differentialgleichung der Hauptflächen:

$$\left(\frac{dv}{du}\right)^2 = \frac{(v^2 + 2\,c^2)\,v^2}{2\,c^2}\,.$$

Es wird:

$$\text{(104)} \qquad v = 2\,c\sqrt{2}\,\frac{e^{u-\varkappa}}{1 - e^{2(u-\varkappa)}}\,,$$

wobei $\varkappa$ die Integrationskonstante ist und die Wurzel entsprechend den beiden Scharen beiderlei Zeichen haben kann. Dies ist die Polargleichung der Schnittlinien der Mittelebene mit den Hauptflächen, wodurch diese vollkommen bestimmt sind.

Wir stellen noch die vereinfachten Ausdrücke zusammen, die P der Reihe nach annimmt, wenn die Kongruenz auf ihre Brennflächen (105), Krümmungsflächen (106) oder Hauptflächen (107) bezogen ist:

$$\text{(105)} \qquad P = \frac{2\,S\,p^2}{U\frac{1}{\lambda} + 2\,W + V\lambda}\,;$$

$$\text{(106)} \qquad P = \frac{R + T\lambda^2}{U + V\lambda^2}\,p^2\,;$$

$$\text{(107)} \qquad P = \mu\left(1 + \frac{2\,S\lambda}{U + V\lambda^2}\right)p^2\,.$$

Hierbei ist auch μ eine Funktion von u und v. Analog ergibt sich aus den Gleichungen (52) in den beiden letzteren Fällen (für $p = 1$):

$$\text{(106a)} \qquad A = \frac{R}{U}\,, \qquad B = \frac{T}{V} \quad \text{(oder umgekehrt)};$$

$$\text{(107a)} \qquad A = \mu + \frac{S}{|\sqrt{UV}|}\,, \qquad B = \mu - \frac{S}{|\sqrt{UV}|}$$

(oder umgekehrt).

§ 29. Umdrehungskongruenzen und Schraubungskongruenzen, besonders isotrope.

Für die isotropen Kongruenzen werden sowohl die Krümmungsflächen als die Hauptflächen unbestimmt. Beide Mäntel der Grenzfläche fallen mit der Mittelfläche zusammen. Die Möglichkeit isotroper Kongruenzen ist nicht von vornherein evident; wir wollen deshalb die einfachsten isotropen Kongruenzen, die es gibt, wirklich aufzeigen, schicken aber einige Bemerkungen über Umdrehungskongruenzen voraus: Wir verlegen die Z-Achse in die Achse Z der Umdrehungskongruenz $\mathfrak{U}$ und können $\mathfrak{U}$ durch Rotation einer beliebigen in ihr enthaltenen Regelfläche erzeugen. Insbesondere nennen wir eine solche Regelfläche, für deren Strahlen alle kürzesten Abstände von Z in dieselbe Ebene (etwa die XZ-Ebene) fallen, eine Meridianfläche $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{U}$. Zur Bestimmung von $\mathfrak{M}$ genügt es, von den vier natürlichen Zeigern der Geraden (§ 18) $\alpha = 0$ zu setzen und zwischen den drei anderen zwei Beziehungen anzunehmen, etwa:

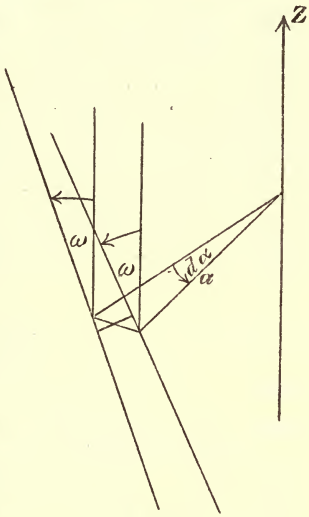

Fig. 10.

$$z = \varphi(\omega), \quad a = \psi(\omega). \tag{108}$$

Wir versuchen jetzt $\varphi(\omega) = 0$ zu wählen, d. h. aus Umdrehungshyperboloiden $\mathfrak{H}$ mit gemeinsamer Kehlebene eine isotrope Kongruenz zusammenzusetzen. Für $\mathfrak{H}$ ist der kürzeste Abstand δ zweier Nachbarstrahlen (Fig. 10)

$$\delta = a\, d\alpha \cdot \cos\omega ,$$

der Winkel ϑ zweier Nachbarstrahlen, wie man aus einer sphärischen Abbildung findet,

$$\vartheta = d\alpha \cdot \sin\omega ,$$

also der Verteilungsparameter

$$P = \lim \frac{\delta}{\vartheta} = a \cot \omega$$

und zwar auch dem Vorzeichen nach, weil $\mathfrak{H}$ für positives ω links gewunden ist. Wir müssen nun einen Strahl s in der Richtung der Meridianfläche, die durch $\varphi = \text{const.}$ als „schraubenartig" (§ 7) gekennzeichnet ist, nach einem solchen Gesetz bewegen, daß der Verteilungsparameter ebenso groß wird. Jedenfalls sind, auch wenn wir ihn nach einem beliebigen Gesetz bewegen, die Ebenen sX und die Ebene parallel zur Z-Achse die Krümmungsebenen, weil sie aufeinander senkrecht stehen und zusammenfallende Zentralpunkte haben. Wenn daher die Verteilungsparameter für diese beiden Ebenen als Zentralebenen gleich groß sind, so wird der Strahl s isotrop ($A = B$). Nun ist für die Meridianfläche $P = \dfrac{da}{d\omega}$. Also folgt aus

$$\frac{da}{d\omega} = a \cot \omega .$$

$$a = \varkappa \sin \omega , \tag{109}$$

wobei $\varkappa$ die Integrationskonstante ist. Der kürzeste Abstand der Strahlen von der Achse ist also auf das Intervall 0 bis $\varkappa$ beschränkt und das berührende Rotationsnetz wird bei wachsendem Abstand wegen

$$P = \varkappa \cos \omega$$

immer kleiner.

Wir wollen nun aus der allgemeinen Theorie bestätigen, daß diese Meridianfläche eine isotrope Kongruenz erzeugt und überhaupt die Frage nach allen isotropen Umdrehungskongruenzen beantworten, wobei wir freilich keine anderen mehr finden werden. Aus den Gleichungen (10) in § 18 und aus (108) kann man sofort die Parameterdarstellung einer beliebigen Umdrehungskongruenz entnehmen; nur schreiben wir jetzt in Übereinstimmung mit unserer sonstigen Parameterbezeichnung u statt α und v statt ω:

$$\begin{cases} p_1 = \sin v \sin u , & p_4 = \varphi(v) \sin v \cos u + \psi(v) \cos v \sin u , \\ p_2 = -\sin v \cos u , & p_5 = \varphi(v) \sin v \sin u - \psi(v) \cos v \cos u , \\ p_3 = \cos v , & p_6 = -\psi(v) \sin v . \end{cases} \tag{110}$$

Hier wird:

$$(111)\quad \begin{cases} R = \psi \sin v \cos v\,, & S = \varphi' \sin^2 v\,, & T = \psi' \\ U = \sin^2 v\,, & W = 0\,, & V = 1\,. \end{cases}$$

Also geben die Bedingungen (53) einer isotropen Kongruenz:

$$\varphi' = 0\,, \quad \psi' \sin v - \psi \cos v = 0\,,$$

dieselbe Differentialgleichung, auf die wir auch früher gestoßen sind.

Satz 63: Die Kongruenzen mit der Meridianfläche

$$z = \text{const.}, \quad a = \varkappa \sin \omega$$

sind die einzigen isotropen Umdrehungskongruenzen.

Aus dem Schema (111) und den Bedingungen (99) ergibt sich neuerdings der schon früher synthetisch erkannte

Satz 64: Für die Umdrehungskongruenzen mit schraubenartiger Meridianfläche sind die Rotationshyperboloide und die Meridianflächen die Krümmungsflächen.

Für unsere isotrope Umdrehungskongruenz J lautet die Parameterdarstellung nach Division durch $\sin v$:

$$(112)\quad \begin{cases} p_1 = \sin u & p_4 = \varkappa \cos v \sin u \\ p_2 = -\cos u & p_5 = -\varkappa \cos v \cos u \\ p_3 = \cot v & p_6 = -\varkappa \sin v\,. \end{cases}$$

Hieraus folgt:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{p_4}{p_5}\,.$$

Um andere homogene Relationen zwischen den p allein systematisch abzuleiten, schreiben wir zuerst leichter ersichtliche nicht homogene auf:

$$p_1^2 + p_2^2 = 1\,, \qquad p_4^2 + p_5^2 + p_6^2 = \varkappa^2\,,$$
$$p_5 = -p_2 p_3 p_6\,, \quad p_4^2 + p_5^2 = p_3^2 p_6^2\,, \quad \text{usw.}$$

Faßt man J als Stabkongruenz auf, so stellt jede dieser Gleichungen einen Stabwald dar, der J enthält, daher zwei von ihnen einen Stabkomplex, der J enthält. Berechnet man also nach der Regel des Satzes 71 (Bd. I) den Träger dieser Stabkomplexe, so erhält man lauter Linienkomplexe,

die durch J gehen, worunter noch einen quadratischen:

$$\varkappa^2(p_1^2+p_2^2)=p_4^2+p_5^2+p_6^2\,,$$
$$p_2p_3p_6+p_5(p_1^2+p_2^2)=0\,,$$
$$p_5p_3p_6-p_2(p_4^2+p_5^2)=0\,,$$
$$p_3(p_4^2-\varkappa p_1^2)=p_1p_4p_6\,,$$
$$\varkappa^2(p_1^2+p_2^2)^2=p_6^2(p_1^2+p_2^2+p_3^2)\,,\quad \text{usw.}$$

Einige davon sind von $\varkappa$ unabhängig. Man hätte auch auf die ursprüngliche Form der Gleichungen (ohne durch $\sin v$ zu dividieren) dieses Verfahren anwenden können und wäre zu anderen nicht homogenen, aber natürlich zu denselben homogenen Relationen gelangt.

Satz 65: Durch die isotrope Umdrehungskongruenz gehen die zwei quadratischen Komplexe

$$(113)\qquad p_1p_5-p_2p_4=0\,,\quad p_4^2+p_5^2+p_6^2-\varkappa^2(p_1^2+p_2^2)=0\,,$$

mehrere Komplexe dritten und vierten Grades.

Wir nennen Schraubungskongruenz eine solche, die durch Schraubenbewegung einer Regelfläche (etwa um die Z-Achse) entsteht. Um ihre Darstellung aus (110) abzuleiten, müssen wir jeden Strahl noch einer Translation $\varkappa u$ in der Z-Richtung unterwerfen, wobei $\varkappa$ konstant ist. Nach § 41 (Bd. I) erhalten wir dadurch:

$$(110a)\qquad q_4=p_4-\varkappa u\sin v\cos u\,,\quad q_5=p_5-\varkappa u\sin v\sin u\,.$$

Die übrigen Größen p in (110) bleiben unverändert. Die Meridianfläche sei ebenso definiert, wie bei den Umdrehungskongruenzen; dann gilt:

Satz 66: Für die Schraubungskongruenzen mit schraubenartiger Meridianfläche sind die Schraubenflächen und die Meridianflächen die Krümmungsflächen.

Über die isotropen Schraubungskongruenzen vergleiche Aufgabe 29.

---

§ 30. Normalenkongruenzen.

Schon in § 22 nannten wir einen Kongruenzstrahl, für den die Beziehung

$$(114)\qquad UT-2WS+VR=0$$

erfüllt ist (die Bedeutung der Symbole ist durch (47) und (48) gegeben), für den also das berührende Hauptnetz rechtwinklig ist, mit anderen Worten für den die Brennebenen aufeinander senkrecht stehen (§ 23), einen Normalstrahl, eine Kongruenz, für deren sämtliche Strahlen jene Beziehung gilt, eine Normalenkongruenz. Diese Bezeichnungen rechtfertigen sich durch den

Satz 67: Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß alle Strahlen einer Kongruenz als Normalen einer Fläche aufgefaßt werden können, ist die, daß ihre sämtlichen Strahlen Normalstrahlen sind.

Zum Beweise dieses Satzes erinnern wir zunächst daran, daß die Bedingung dafür, daß eine totale Differentialgleichung

$$p_1\,dx + p_2\,dy + p_3\,dz = 0 \tag{115}$$

durch eine Gleichung von der Form

$$f(x, y, z) = \text{const.} = c \tag{116}$$

integrierbar ist, lautet (vgl. z. B. Lie u. Scheffers, Geom. d. Berührungstr., S. 198):

$$p_1(p_{2z} - p_{3y}) + p_2(p_{3x} - p_{1z}) + p_3(p_{1y} - p_{2x}) = 0\,, \tag{117}$$

wobei $p_{2z} = \dfrac{\partial p_2}{\partial z}$ ist, usw. Die geometrische Bedeutung der Gleichung (115) ist die, daß jedem Punkte $P \equiv (x, y, z)$ des Raumes durch die Größen p_1, p_2, p_3 eine Fortschreitungsrichtung zugeordnet ist, deren Richtungskosinus ihnen proportional sind, somit auch ein darauf senkrechtes Flächenelement. Da andrerseits auch

$$f_x : f_y : f_z = p_1 : p_2 : p_3$$

sein soll, so muß diese Fortschreitungsrichtung die Normalenrichtung der durch P gehenden Integralfläche sein. Die Integrationsaufgabe besteht also (geometrisch ausgedrückt) darin, die ∞^3 gegebenen Flächenelemente zu ∞^1 Flächen zusammenzuordnen. Wenn die Integrabilitätsbedingung erfüllt ist, so gibt es wegen der Willkürlichkeit von c nicht nur eine, sondern unendlich viele Integralflächen, welche die orthogonalen Trajektorien des durch das simultane System

$$\frac{dx}{p_1} = \frac{dy}{p_2} = \frac{dz}{p_3}$$

definierten Bündels von ∞^2 Kurven sind.

LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

Wenn nun $p_1, \ldots . p_6$ als Funktionen von u, v gegeben sind, so besteht das Kurvenbündel aus den Strahlen einer Kongruenz und wir haben in die Bedingung (117) u, v statt x, y, z als unabhängige Veränderliche einzuführen. Es bestehen die Inzidenzbeziehungen (Bd. I, § 38, Gleichungen 40):

$$(118)\qquad \begin{cases} p_4 x + p_5 y + p_6 z = 0 \\ A = -p_4 + p_3 y - p_2 z = 0 \\ B = -p_5 - p_3 x + p_1 z = 0 \\ C = -p_6 + p_2 x - p_1 y = 0\,, \end{cases}$$

unter denen zwei unabhängige sind. Wir könnten in einem konkreten Fall etwa so verfahren: Wir berechnen aus zweien der Gleichungen (118) u, v als Funktionen von x, y, z, führen diese in die gegebenen Ausdrücke p ein und können dann prüfen, ob die Bedingung (117) erfüllt ist. Allgemein stellt sich die Rechnung so: Es ist z. B.

$$p_{2z} = p_{2u} u_z + p_{2v} v_z\,.$$

Also geht (117) über in:

$$(119)\qquad \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ p_{1u} & p_{2u} & p_{3u} \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ p_{1v} & p_{2v} & p_{3v} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = 0\,;$$

hierin haben wir noch $u_x \ldots . v_z$ zu berechnen. Bezeichnen wir mit A_u dasjenige, was aus dem Ausdruck A hervorgeht, wenn wir jedem p noch die zweite Marke u anhängen usw., so folgt durch Differentiation der letzten drei Gleichungen (118) nach einer der unabhängigen Veränderlichen x, y, z:

$$(120)\qquad \begin{cases} A_u u_x + A_v v_x = 0 & A_u u_y + A_v v_y = -p_3 \\ B_u u_x + B_v v_x = p_3 & B_u u_y + B_v v_y = 0 \\ C_u u_x + C_v v_x = -p_2 & C_u u_y + C_v v_y = p_1 \end{cases}$$

und ein drittes derartiges System. Nun muß die Matrix

$$\begin{matrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{matrix}$$

den Rang zwei haben, weil sonst u, v nicht voneinander unabhängig wären; also folgt aus (120):

$$(121)\qquad \begin{cases} p_1 A_u + p_2 B_u + p_3 C_u = 0 \\ p_1 A_v + p_2 B_v + p_3 C_v = 0\,, \end{cases}$$

ferner aus den ersten zwei Gleichungen (120):

$$u_x = \frac{-p_3 A_v}{A_u B_v - A_v B_u}, \qquad v_x = \frac{p_3 A_u}{A_u B_v - A_v B_u}.$$

Rückt man hierin zyklisch vor, so sieht man mit Hilfe von (121):

(122) $\quad u_x : u_y : u_z : v_x : v_y : v_z = A_v : B_v : C_v : -A_u : -B_u : -C^u .$

Man kann daher die Größen auf den rechten Seiten von (122) in (119) einführen.

Nun denken wir uns zur Vereinfachung die Kongruenz auf ihre Brennflächen bezogen. Dann ist $R = T = 0$ und die Bedingung für einen Normalstrahl reduziert sich auf $W = 0$ (§ 28, namentlich Satz 61). Daher ist, um den Satz 67 zu beweisen, nur zu zeigen, daß auch die Bedingung (119) sich in $W = 0$ umformen läßt. Nun folgt in diesem Fall aus (118) identisch:

$$p_{1u} A_u + p_{2u} B_u + p_{3u} C_u = 0 ,$$

was in Verbindung mit der ersten Gleichung (121) ergibt:

$A_u = \varphi(u, v)(p_2 p_{3u} - p_3 p_{2u})$, $\quad B_u = \varphi \cdot (p_3 p_{1u} - p_1 p_{3u})$, ...

analog:

$$A_v = \psi(u, v)(p_2 p_{3v} - p_3 p_{2v}) , \quad \ldots$$

Setzen wir dies in die vermöge (122) geänderte Bedingung (119) ein, so erhalten wir:

$$(\psi - \varphi) W = 0 .$$

Wir fragen zunächst, ob $\varphi = \psi$ sein kann. Dann würde aus (120) folgen:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p_3}{p_2}\right) = 0 , \qquad p_2^2 \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p_3}{p_2}\right) = -\frac{p_3}{b} , \quad \ldots$$

$$p_3^2 \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p_1}{p_3}\right) = \frac{p_3}{\varphi} , \quad \text{usw.}$$

Die Diagonalgleichungen würden ergeben:

$$p_1 : p_2 : p_3 = \alpha(x) : \beta(y) : \gamma(z)$$

und aus den weiteren Gleichungen

$$p_3^2 \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p_1}{p_3}\right) + p_2^2 \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p_3}{p_2}\right) = 0 , \quad \text{usw.}$$

würde folgen:

$$p_1 : p_2 : p_3 = x - c_1 : y - c_2 : z - c_3 ,$$

wobei die c konstant sind, ferner aus (118):

$$p_4 : p_5 : p_6 = y\,c_3 - z\,c_2 : z\,c_1 - x\,c_3 : x\,c_2 - y\,c_1 .$$

Dies führt also nur auf den trivialen Fall des Strahlenbündels mit dem Scheitel c_1, c_2, c_3, so daß in der Tat die Bedingung (119) auf $W = 0$ zurückkommt.

§ 31. Das Dichtigkeitsmaß und die Striktionsfläche.

Wählt man in irgend einer Normalebene N eines Kongruenzstrahles s eine einfache geschlossene Linie C, die den Schnittpunkt (N, s) umschlingt, so ist dadurch auch in der Kongruenz eine Umgebung von s abgegrenzt, indem man alle Strahlen in dieselbe aufnimmt, die N innerhalb C schneiden. Diese Umgebung wird von den übrigen Strahlen durch eine Regelfläche abgetrennt (vgl. Fig. 11, die für die Umgebung eines elliptischen Strahles entworfen ist). Verschiebt man N (aber immer normal zu s), so wird sich die Schnittkurve mit der Regelfläche ändern. Da aber durch jeden solchen Querschnitt immer dieselben Strahlen hindurchgehen, so gelangt man zur Anschauung, daß dort, wo der Querschnitt kleiner wird (etwa bei C_0), die Strahlen sich dichter zusammendrängen. Wenn wir jedoch den Vergleich auf die Umgebungen verschiedener Strahlen ausdehnen wollen, so setzen wir fest, daß wir dort, wo bei gleichen Querschnitten mehrere verschiedene Richtungen vertreten sind, die Kongruenz als dichter betrachten wollen. Nach diesen Vorbereitungen, die der Erweckung einer bestimmten Anschauung dienen, können wir mit Kummer die präzise Definition des Dichtigkeitsmaßes in einem Punkte P eines Strahles s aufstellen; sie hat eine gewisse Analogie mit der von Gauß gegebenen Definition des Krümmungsmaßes einer Fläche:

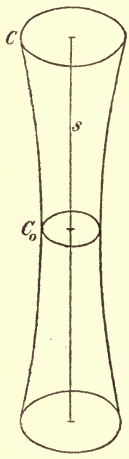

Fig. 11.

Wir legen durch P eine Normalebene N zu s und nehmen in ihr eine kleine geschlossene Linie C an, die P

umschlingt und den Flächeninhalt f haben möge. Dann bewegen wir einen zu s benachbarten Kongruenzstrahl so, daß sein Schnittpunkt mit N die Linie C durchläuft. Ein bestimmter Durchlaufungssinn gehört zu einem bestimmten Halbstrahl von s als positiver Sinn. Durch diesen Halbstrahl ist auch eine bestimmte Γ der beiden sphärischen Abbildungen von C bevorzugt; sie habe den Flächeninhalt φ. Dann verstehen wir unter dem Dichtigkeitsmaß Δ des Strahles s für den Punkt P den

$$\lim \frac{\varphi}{f},$$

wobei sich der Grenzübergang darauf bezieht, daß die Kurve C sich auf den Punkt P zusammenzieht; φ und f sollen gleiche oder verschiedene Vorzeichen haben, je nachdem der Durchlaufungssinn von C und Γ derselbe ist oder nicht.

Seien $p_i(u, v)$ die Zeiger des Strahles s und $p_i(u + du, v + dv)$ die eines Nachbarstrahles, der C schneidet. Die ersten drei davon bestimmen das sphärische Bild von C, somit die Größe φ, wobei wir voraussetzen:

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1 . \tag{123}$$

Wenn nun

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

das Linienelement einer Fläche ist, so ist

$$\int\int \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv$$

die Oberfläche (z. B. Stahl und Kommerell, Grundformeln d. Flächenth. S. 2) und zwar ist für unsere Einheitskugel:

$$E = \sum_{i=1}^{3} p_{iu}^2 , \quad F = \sum_{1}^{3} p_{iu}\,p_{iv} , \quad G = \sum_{1}^{3} p_{iv}^2 . \tag{124}$$

Wählen wir die rechtwinkligen Zeiger in der Ebene N zu Parametern u, v, so ist also:

$$\frac{\varphi}{f} = \frac{\int\int \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv}{\int\int du\,dv} ,$$

wobei die Integrale im Zähler und im Nenner sich über dasselbe Gebiet erstrecken. Es ist also Δ gleich dem Wert

von $\sqrt{EG - F^2}$ für den Strahl s (vgl. den ähnlichen Beweis für das Gaußsche Krümmungsmaß bei Darboux, Th. des surf. II, Art. 498). Δ ist daher (was nun auch bei beliebigen Parametern bestehen bleiben muß) erstens von der Wahl der Kurve C unabhängig und zweitens nur von den Ableitungen erster Ordnung der Zeiger p abhängig. Nachdem dies feststeht, können wir zur Bestimmung des Dichtigkeitsmaßes in einem Punkte eines bestimmten Strahls das berührende Hauptnetz dieses Strahls an Stelle der Kongruenz selbst zugrunde legen, weil hierdurch die Ableitungen erster Ordnung nicht geändert werden; d. h. wir brauchen Δ nur für die Hauptstrahlen der Netze zu bestimmen und können dabei eine beliebige spezielle Form der Linie C wählen.

a) Für ein elliptisches Netz grenzen wir die Umgebung von s durch eine Regelschar ab, wie sie in Satz 109 und Fig. 47 (Bd. I) aufgetreten ist. Wir haben dort ein Rotationsnetz so erzeugt, daß wir zwei kongruente um 90^0 gegeneinander verdrehte Punktfelder in die Entfernung $2c$ voneinander abhoben. Dabei schneidet ein Rotationshyperboloid R des Netzes die Ebenen dieser Felder in zwei Kreisen, deren Halbmesser sich zu dem des Kehlkreises wie $\sqrt{2} : 1$ verhalten. Deshalb sind die Gleichungen*) der R:

$$\frac{x^2 + y^2}{r^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

und der entsprechenden Hyperboloide für ein allgemeines Netz, wie sich aus seiner Erzeugung durch eine spezielle Affinität (Bd. I, Satz 108) ergibt:

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{m^2 r^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 . \tag{125}$$

Hierbei stimmt die Bedeutung von r, m, c auch mit Bd. I, § 55, c) überein. Schneiden wir eins dieser Hyperboloide, die alle eine gemeinsame imaginäre Achse haben, durch eine zur Kehlellipse E_0 parallele Ebene $z = a$, so habe die Schnittellipse, die wir als Linie C nehmen, den Inhalt E. Dann ist:

$$E : E_0 = a^2 + c^2 : c^2 , \tag{126}$$

*) Diese Gleichungen treten zuerst bei Klein, Nicht-eukl. Geom. II, S. 34 (1893) ohne Beweis auf.

während φ für alle Punkte des Strahls ungeändert bleibt. Wenn also Δ und Δ_0 die Dichtigkeitsmaße für die Mittelpunkte von E und E_0 sind, so ist:

$$\Delta : \Delta_0 = c^2 : a^2 + c^2 \tag{127}$$

und wir haben nunmehr das Dichtigkeitsmaß Δ_0 im Mittelpunkte des Hauptstrahls zu berechnen. Hierzu schreiben wir die Gleichungen des Netzes in der Form (83, a in Bd. I, § 55):

$$q_1 = -\frac{v}{mw}, \quad q_2 = \frac{mu}{w}, \quad q_3 = \frac{c}{w},$$

wobei

$$w = \sqrt{\frac{v^2}{m^2} + m^2u^2 + c^2}.$$

Dann sind alle Bedingungen für die Gültigkeit der Formel

$$\Delta_0 = \sqrt{EG - F^2} \tag{128}$$

erfüllt*) und wir finden $\Delta_0 = 1 : c^2$, also

$$\Delta = \frac{1}{a^2 + c^2}. \tag{129}$$

b) Für ein hyperbolisches Netz mit den Brennlinien b, b' grenzen wir eine Umgebung des Hauptstrahls s ab, indem wir von seinen Schnittpunkten A, A' mit den Brennlinien (es ist $AA' = 2c$) auf diesen selbst nach jeder Seite dieselbe Strecke k abtragen, wodurch wir zu den vier Punkten S gelangen (Fig. 12). Alle Strahlen, die innerhalb der Strecken S_1S_2 und S_3S_4 die Brennlinien schneiden, sollen zur Umgebung gehören, die also durch Teile von vier ebenen Strahlbüscheln abgegrenzt wird. Die Linien C sind Parallelogramme mit dem Inhalt P, insbesondere diejenige in der Mittelebene eine Raute mit der Seite k. Es ist

$$P : P_0 = c^2 - a^2 : c^2,$$

also

$$\Delta : \Delta_0 = c^2 : c^2 - a^2, \tag{130}$$

*) Man beachte bei Ausrechnung von E, F, G, daß die partiellen Ableitungen von w an der Stelle $u = v = 0$ verschwinden.

wobei Δ, Δ_0 die Dichtigkeitsmaße für die Mittelpunkte M, M_0 von P, P_0 sind und $a = M_0 M$ der Abstand zwischen P und der Mittelebene.

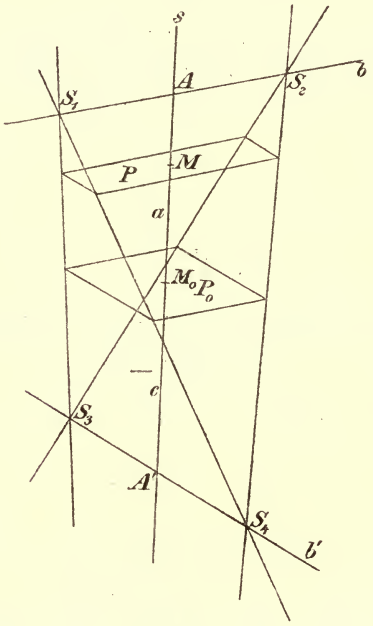

Fig. 12.

Zur Bestimmung von Δ_0 können wir auf die Darstellung (§ 24, b, Gleichungen (68))

$$p_1 = \frac{v \cot \alpha}{w}, \quad p_2 = \frac{u \operatorname{tg} a}{w}, \quad p_3 = \frac{c}{w},$$

wobei

$$w = \sqrt{v^2 \cot^2 \alpha + u^2 \operatorname{tg}^2 \alpha + c^2},$$

die Formel (128) anwenden und finden:

$$\Delta_0 = -\frac{1}{c^2}.$$

Es ist nämlich hier in (128) das negative Zeichen der Wurzel zu nehmen, weil die Anschauung lehrt, daß irgend ein Umfahrungssinn der Raute P_0 und der früher zugeordnete ihrer sphärischen Abbildung entgegengesetzt sind. Aus (130) folgt nun

$$\Delta = \frac{1}{a^2 - c^2}. \tag{131}$$

c) Ein parabolisches Strahlennetz können wir als Grenzfall eines hyperbolischen betrachten, indem wir die Brennlinien durch eine Schraubenbewegung zusammenrücken lassen. Dann wird durch die Berührungsebenen der Schraubenfläche die für die Brennlinie des parabolischen Netzes kennzeichnende Korrelation definiert. Hier gilt also für den Hauptstrahl:

$$\Delta = \frac{1}{a^2}. \tag{132}$$

d) Die elliptischen und die hyperbolischen Netze sind (abgesehen von ihrer Lage im Raume) durch je zwei Konstante bestimmt, nämlich das elliptische durch den Abstand $2c$ der Potenzebenen und das Achsenverhältnis m der Kehlellipsen seiner ausgezeichneten koaxialen Hyperboloide, das hyperbolische durch den Abstand $2c$ und den Winkel 2α seiner Brennlinien. Es bestimmen also m und α die Form des Netzes, dagegen c in beiden Fällen die Größe. Machen wir die Anwendung auf einen beliebigen Strahl einer Kongruenz:

Satz 68: Das Dichtigkeitsmaß ist nur von der Größe, aber nicht von der Form des berührenden Hauptnetzes abhängig; es wird in den Brennpunkten unendlich und ist zwischen ihnen negativ; sein absoluter Betrag erreicht (für Verschiebungen auf demselben Strahl) im Mittelpunkte eines elliptischen Strahls ein Maximum, eines hyperbolischen ein Minimum.

Da wir die Konstante c des berührenden Hauptnetzes nach § 23 und 22 aus den Zeigern der Kongruenzstrahlen zu berechnen gelernt haben, können wir sofort Δ durch diese Zeiger ausdrücken. Man findet für alle Fälle übereinstimmend:

$$\Delta = \frac{1}{a^2 + AB}, \tag{133}$$

wobei AB aus (52) zu entnehmen ist*).

Alle Punkte auf den verschiedenen Strahlen einer Kongruenz, für die Δ denselben Wert hat, liegen auf einer „Fläche gleichen Dichtigkeitsmaßes“ (Kummer). Man kann aber noch in anderer Weise das Dichtigkeitsmaß zur Definition von Flächen verwenden und zwar von solchen, die der Kongruenz selbst angehören: Alle Strahlen, in deren Mittelpunkt Δ denselben Wert hat, bilden eine „Regelfläche konstanter Umgebungsgröße“, ein Ausdruck, der nach den Bemerkungen eingangs von d) sofort verständlich sein wird. Gleichberechtigt mit ihnen sind die „Regelflächen konstanter Umgebungsform“, längs deren m oder α konstant ist. Hiervon ist die Fläche der Normalstrahlen ein Spezialfall. Schreiben wir die Gleichungen einer gegebenen Kongruenz so, daß die Bedingung (123) erfüllt ist, so können wir aus (52) die endlichen Gleichungen der Flächen konstanter Umgebungsgröße in Form einer Beziehung zwischen u und v entnehmen ($\varkappa$ konstant):

$$RT - S^2 = \varkappa(UV - W^2). \tag{134}$$

e) Gehen wir nochmals auf die früher definierten Querschnitte C eines Bündels von Kongruenzstrahlen zurück, das die Umgebung eines bestimmten Strahls s bildet. Die Ebene ε von C bleibe immer senkrecht auf s und für die Extreme des Flächeninhalts C heiße M der Schnitt (ε, s). Sei M_0 die Grenzlage von M, wenn sich das Bündel auf s selbst zusammenzieht; dann heißt M_0 ein Striktionspunkt von s und die Gesamtheit der Striktionspunkte auf den verschiedenen Strahlen heißt Striktionsfläche. Je nachdem man hierbei C selbst oder seinen absoluten Betrag betrachtet, wird bloß der Mittelpunkt von s Striktionspunkt sein oder auch seine Brennpunkte. Denn der Querschnitt wechselt sein Vorzeichen, wenn er einen Brennpunkt von s passiert. Wir halten die erstere Annahme fest und können sagen:

*) Wie schon in § 22 ergibt sich wieder die Analogie der Größen A, B mit den Hauptkrümmungshalbmessern der Flächentheorie: Für $a = 0$, d. h. für den Mittelpunkt eines Kongruenzstrahles ist Δ genau dem Gaußschen Krümmungsmaße analog.

Das Dichtigkeitsmaß ist den Querschnitten umgekehrt proportional; daher erreichen beide zugleich ihre Extreme, also:

Satz 69: Die Striktionsfläche einer Strahlenkongruenz fällt mit ihrer Mittelfläche zusammen.

Kühne hat (Math. Ann. Bd. 54) das analoge Problem für beliebige σ-fache Scharen ϱ-facher Mannigfaltigkeiten, die eine $\sigma + \varrho$-fache (eventuell krumme) Mannigfaltigkeit innerhalb einer n-fachen ausmachen, behandelt und in allgemeinster Weise die Differentialgleichungen der Striktionsmannigfaltigkeit aufgestellt (hier ist $\varrho = 1$, $\sigma = 2$, $\sigma + \varrho = n = 3$). Sein Ausgangspunkt würde sich in unserem Fall so spezialisieren: Man wählt in einer Kongruenz einen Strahl s und zwei Nachbarstrahlen s_1, s_2 und auf jedem dieser Strahlen einen Punkt. Diese drei Punkte P, P_1, P_2 bestimmen ein Dreieck und man sucht das Minimum seiner Fläche für beliebige Verschiebungen der Punkte auf ihren Strahlen. Man sieht sogleich, daß ein absolutes Minimum der Dreiecksfläche nicht existiert, weil die Transversalen, die alle drei Strahlen schneiden, Dreiecke mit der Fläche Null bestimmen. Aber es können relative Extreme vorhanden sein, für die P, wenn s_1 und s_2 nach s einrücken, eine bestimmte Grenzlage annimmt und zwar unabhängig davon, welche Fortschreitungsrichtungen des Linienraums die Nachbarstrahlen beim Einrücken innehalten. Die Differentialgleichung für den Ort von P wird dadurch erhalten, daß man die Variation der Dreiecksfläche (oder ihres Quadrates) Null setzt und dies ist bekanntlich nur eine notwendige aber keine hinreichende Bedingung für ein Extrem. In der Tat sieht man, daß im Falle eines hyperbolischen Strahlennetzes unsere Raute P_0 (die man als das vierfache eines gewissen Striktionsdreiecks betrachten kann) überhaupt nur bei Beschränkung auf normale Querschnitte ein Extrem und zwar ein Maximum hat. Wollte man also die Definition der Striktionsfläche auf den Ort der Minima beschränken, so müßte man sagen, daß eine Strahlenkongruenz in ihren hyperbolischen Teilen überhaupt keine Striktionsfläche hat, sondern nur in ihren elliptischen Teilen. Deshalb haben wir die Verschiebungen auf Normalquerschnitte beschränkt und die Maxima als gleichberechtigt zugelassen. Wir können uns auf die genauere Darlegung der hier angedeuteten Sachlage, wie auf die eleganten Entwicklungen Kühnes nicht

einlassen, noch weniger auf die Untersuchung der zweiten Variation, sondern wollten bloß auf diese Probleme aufmerksam machen.

---

§ 32. Geschichtliche Bemerkungen über die Differentialgeometrie der Kongruenzen*).

Malus hat das erste Theorem über allgemeine Strahlenkongruenzen aufgestellt, nämlich daß sie sich auf zweierlei Art in eine Schar von ∞^1 abwickelbaren Flächen zerlegen lassen (Optique, J. de l'Éc. polyt. T. VII, cah. 14, 1808), was für Normalenkongruenzen schon Monge erkannt hatte.

Das „Theorem von Malus und Dupin" (vgl. den folgenden Paragraphen) hat Malus selbst nur teilweise bewiesen**).

Der erste, der die Theorie der Strahlenkongruenzen systematisch in Angriff genommen hat, war Hamilton. Er hat darüber (ebenfalls veranlaßt durch optische Interessen) zwei Abhandlungen veröffentlicht (Transact. Irish Ac. vol. XV und XVI, 1828 und 1830), die aber zunächst nicht viel Beachtung gefunden haben. Kummer hat die Ergebnisse Hamiltons (J. f. Math. Bd. 57, 1860) auf neuem und elementarem Wege abgeleitet und vervollständigt***). Wir wollen seinen Ausgangspunkt besprechen: Wir schneiden die zu untersuchende Strahlenkongruenz durch eine beliebige Fläche

$$x(u, v), \quad y(u, v), \quad z(u, v).$$

Dann ist ein Strahl s der Kongruenz bestimmt, wenn sein Schnittpunkt P_0 mit jener Fläche $\mathfrak{F}$ und seine Richtungskosinus X, Y, Z gegeben werden. Die Zeiger ξ, η, ζ eines Punktes P auf s im Abstand t von P_0, also auch die Gleichungen von s, sind:

$$\xi = x + tX, \quad \eta = y + tY, \quad \zeta = z + tZ. \tag{135}$$

*) Ausführlicheres findet man in meinem Bericht „Die Entwicklung und der gegenwärtige Stand der differentiellen Liniengeometrie" (Jahresb. d. D. Mathematikervereinigung, XV, 1906).

**) Über seine Entdeckung vergleiche man Darboux, Theorie des surf. II, Art. 450, Anm. und Lie-Scheffers, Geom. d. Berührungstransf. S. 269, f.

***) Eine konzise Darstellung der Kummerschen Theorie findet sich bei Bianchi-Lukat, Vorl. über Differentialgeom. Kap. X, der wir uns in der Wahl der Bezeichnungen anschließen.

Dabei sind auch X, Y, Z Funktionen von u und v und zugleich die Zeiger des sphärischen Bildes von s. Betrachtet man nun neben s einen Nachbarstrahl s_1, so kann man den kürzesten Abstand dieser zwei Strahlen (samt seiner Richtung und seinem Fußpunkt) und ihren Winkel als Funktionen der Bestimmungsstücke des gegebenen Strahls und von du und dv berechnen. Dabei treten neben den Koeffizienten der ersten Grundform des sphärischen Bildes der Fläche $\mathfrak{F}$ nämlich

$$E = \Sigma X_u^2, \quad F = \Sigma X_u X_v, \quad G = \Sigma X_v^2$$

noch die Koeffizienten e, $f + f'$, g einer zweiten Differentialform auf, nämlich:

$$e = \Sigma X_u x_u, \quad f = \Sigma X_u x_v, \quad f' = \Sigma X_v x_u, \quad g = \Sigma X_v x_v.$$

Alle Summen bestehen aus drei Gliedern, die man erhält, wenn man X auch durch Y, Z; x auch durch y, z ersetzt. Die sechs Größen E, F, G; e, $f + f'$, g spielen in dieser Theorie eine analoge Rolle, wie die Größen U, V, W; R, S, T unserer Entwickelungen. Die Hauptgegenstände, die Kummer mit diesen Hilfsmitteln bearbeitet, sind: Grenzpunkte, Hauptebenen, Brennpunkte, Brennebenen, die Hamiltonsche Gleichung, die Brennflächen und die abwickelbaren Flächen, das Dichtigkeitsmaß.

Möbius war der erste, der die affine Verwandschaft für die Theorie der „unendlich dünnen Strahlenbündel" verwertet hat (Ges. W. Bd. IV, 1862). Da zwei affine Felder durch drei Paare entsprechender Punkte bestimmt sind, muß ein solches Bündel durch den Ausgangsstrahl und zwei Nachbarstrahlen bestimmt sein*) und es ergibt sich die Aufgabe, daraus die Brennebenen und Brennpunkte zu finden, was von Zech (Zeitschr. f. Math. u. Phys. Bd. 17) konstruktiv durchgeführt wurde. Auf dem Boden der Bewegungsgeometrie wurden die wichtigsten Ergebnisse Kummers von Mannheim (Liouv. J. (2) 17 und Géométrie cinématique, 1894) bewiesen.

---

*) Wir können in unserer Terminologie präziser sagen: Durch einen regulären Strahl einer beliebigen Kongruenz und zwei von ihm ausgehende in der Kongruenz enthaltene Fortschreitungsrichtungen sind alle übrigen bestimmt, analog wie durch zwei Tangenten die Berührungebene einer Fläche bestimmt ist.

Kummer bevorzugt, wie wir es jetzt ausdrücken können, unter den ∞^2 berührenden Strahlennetzen das Hauptnetz, was auch zweckmäßig ist. Er sagt aber nicht ausdrücklich*), daß andere Strahlennetze gleichberechtigt sind, solange man sich auf Eigenschaften beschränkt, die von keinen höheren als den ersten Ableitungen**) der Zeiger abhängen. Dies schließt nicht aus, daß bei Betrachtung der Eigenschaften zweiter Ordnung ein bestimmtes unter den berührenden Strahlennetzen zu bevorzugen ist, dessen Brennlinien zum Strahl s im allgemeinen schief liegen. In dieser Richtung liegen Untersuchungen von Mathiessen (Zeitschr. f. Math. u. Phys. Bd. 33), Arendt (ib. Bd. 36) und namentlich Waelsch vor, der überhaupt die projektiven Eigenschaften zweiter Ordnung der Umgebung eines Kongruenzstrahls systematisch unter Anwendung der Invariantentheorie untersucht hat (Wiener Sitzungsber. Bd 98, II, 1889 und Bd. 100, II, 1891). Dabei werden die Linienzeiger so eingeführt, daß die Gleichung eines Kongruenzstrahls in der Form

$$\sum_1^6 a_\varkappa x_\varkappa = 0$$

angesetzt wird, wobei die Koeffizienten $a_\varkappa$ von zwei Parametern abhängen und der Bedingungsgleichung für die Linienzeiger genügen. Schon früher hat nach anderen Methoden Koenigs (Sur les propr. inf. de l'espace réglé, Thèse, Paris, 1882) Eigenschaften zweiter Ordnung untersucht, die wir zum Teil noch kennen lernen werden.

Die Kummersche Theorie der Strahlensysteme, die von Lilienthal (Unters. zur allg. Th. d. krummen Oberfl. u. geradl. Strahlensyst., Bonn, 1886) und Hensel (J. f. Math. Bd. 102) vervollkommnet und weitergeführt wurde, hat den Vorzug in unmittelbarem Zusammenhang mit bekannten Formeln der Flächentheorie zu stehen, aber den Nachteil,

*) Dieser Umstand hat zu Mißverständnissen Anlaß gegeben, die von Weingarten (J. f. Math. Bd. 98) klargestellt wurden. In der Tat brauchen auch bei Normalenkongruenzen die Brennlinien eines berührenden Strahlennetzes keineswegs sich senkrecht kreuzend angenommen zu werden; wohl aber stehen hier die Brennebenen immer zueinander senkrecht, wie aus § 23 hervorgeht.

**) Wir wollen (mit Koenigs) kurz sagen, „Eigenschaften erster" oder „zweiter ... Ordnung".

daß eine willkürliche Fläche $\mathfrak{F}$, von der die Eigenschaften der Kongruenz gar nicht abhängen, in die Untersuchung hineingetragen wird. Wir haben es daher vorgezogen, einen anderen Weg einzuschlagen, der auch zu einigen neuen Ergebnissen geführt hat (s. Vorwort). Es gibt aber ein Theorem über Strahlenkongruenzen, bei dem in der Tat eine bestimmte Fläche eine ausgezeichnete Rolle spielt und hier wird man nichts Zweckmäßigeres als den Ausgangspunkt Kummers wünschen können; diesem Theorem wenden wir uns nun zu.

§ 33. Der Satz von Malus und Dupin.

Wenn die Kongruenz (135) eine Normalenkongruenz sein soll, so muß es möglich sein, t als Funktion von u und v so zu bestimmen, daß überall die Richtung X, Y, Z auf der Berührungsebene des zugehörigen Flächenpunktes ξ, η, ζ senkrecht steht, daß also identisch (Bianchi, a. a. O.)

$$\Sigma X d\xi = 0$$

ist oder

$$\Sigma X \xi_u = 0, \quad \Sigma X \xi_v = 0.$$

Diese Bedingungen reduzieren sich wegen $\Sigma X^2 = 1$ nach (135) auf

$$\Sigma X x_u + t_u = 0, \quad \Sigma X x_v + t_v = 0.$$

Setzen wir daher

$$\Sigma X x_u = \mathfrak{U}, \quad \Sigma X x_v = \mathfrak{V}$$

so ist

$$\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial v} = \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial u} \tag{136}$$

die notwendige und hinreichende Bedingung für die Möglichkeit einer solchen Funktion t. Wir wählen jetzt als v-Linien auf der Ausgangsfläche $\mathfrak{F}$ diejenigen Kurven, die von den orthogonalen Projektionen der Kongruenzstrahlen auf die zugehörigen Berührungsebenen von $\mathfrak{F}$ umhüllt werden, als u-Linien*) die senkrechten Trajektorien der v-Linien.

*) Wir nennen u-Linien diejenigen Linien, längs deren u allein variabel ist. Manche Autoren nennen u-Linien diejenigen, längs deren u konstant ist. Die erstere Festsetzung empfiehlt sich dadurch, daß sie unmittelbar auf mehrfache Mannigfaltigkeiten ausgedehnt werden kann.

Dann ist überall $\mathfrak{U} = 0$; (136) reduziert sich also auf

$$\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial u} = 0 . \tag{137}$$

Nennen wir

$$x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 = \Gamma ,$$

so sind

$$\frac{x_v}{\sqrt{\Gamma}}, \quad \frac{y_v}{\sqrt{\Gamma}}, \quad \frac{z_v}{\sqrt{\Gamma}}$$

die Richtungskosinus der Tangente der v-Linie. Wenn daher ω der Winkel eines Kongruenzstrahls mit der Flächennormale ist, so ist

$$\sin\omega = \frac{\mathfrak{V}}{\sqrt{\Gamma}}$$

und (137) wird jetzt

$$\frac{\partial(\sqrt{\Gamma} \cdot \sin\omega)}{\partial u} = 0 .$$

Setzen wir nun voraus, diese Bedingung sei erfüllt und jeder Strahl der Kongruenz sei ein Lichtstrahl, der durch die Fläche $\mathfrak{F}$ gebrochen wird. Ist n der Brechungsindex, so ist auch die analoge Bedingung für die Kongruenz der gebrochenen Strahlen, nämlich

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{\Gamma} \cdot \frac{\sin\omega}{n}\right) = 0$$

erfüllt, also gilt:

Satz 70: Wenn ein aus Lichtstrahlen bestehendes Normalensystem an einer beliebigen Fläche gebrochen wird, so ist die so entstehende Kongruenz wieder eine Normalenkongruenz.

Es ist aus dem Beweisgang klar, daß an Stelle der Brechung eine Reflexion treten kann ($n = -1$) und daß der Satz bestehen bleibt, wenn eine Normalenkongruenz eine beliebige Anzahl von Brechungen und Reflexionen erfährt.

---

§ 34. Zylindrische und singuläre Strahlen.

Wir haben gelegentlich schon in den §§ 20, 22, 27 zylindrische Kongruenzen und Strahlen untersucht und wollen jetzt die Theorie der Umgebung eines Kongruenzstrahles

durch genauere Betrachtung der zylindrischen Strahlen vervollständigen. Dabei gehen wir von der Gleichung

$$z = \frac{A}{L} + 2\frac{B}{L}\cdot\frac{v}{u} \tag{21 a}$$

des § 20 aus, die sich durch passende Wahl des Zeigersystems und der Parameter vereinfachen läßt: Die v-Flächen ($u = \text{const.}$) der zylindrischen Kongruenz $\mathfrak{C}$ sind die Zylinderflächen, als u-Flächen nehmen wir die andere Schar $\mathfrak{A}$ abwickelbarer Flächen (§ 27). Wir setzen voraus, daß der Berührungspunkt des betrachteten Strahles s mit dem endlichen Mantel M der Brennfläche der Ursprung U sei und daß M die XZ-Ebene berühre; dann ist

$$q_{4v} = q_{6v} = 0$$

und wir können voraussetzen

$$q_{5v} = 1\,,$$

wenn wir v proportional der Bogenlänge eines senkrechten Schnittes des Zylinders durch s wählen. Die sphärische Abbildung von $\mathfrak{C}$ fällt in eine Kurve zusammen; wählen wir deren Bogenlänge als u, so wird $L = 1$ und (21 a) vereinfacht sich nach (22) und weil für $v = 0$ auch $z = 0$ sein muß, zu

$$z = q_{1u}\cdot\frac{v}{u}\,.$$

Die Gratlinie der durch s gehenden Fläche $\mathfrak{A}$ hat in U eine Schmiegungsebene, die mit der XZ-Ebene den Winkel ψ einschließen möge; dann ist $q_{1u} = \cos\psi$. Je nachdem also diese Schmiegungsebene auf der Zylinderfläche senkrecht steht oder nicht, ist z für alle Fortschreitungsrichtungen Null oder durchläuft alle möglichen Werte nach dem Gesetz

$$z = \frac{v}{u}\cos\psi\,. \tag{138}$$

Jetzt wird aus (47) und (48):

$$U = 1\,,\quad 2S = q_{2u} = \sin\psi\,,\quad R = 0\,,$$

das letztere, weil für $\lambda = 0$ eine Fläche $\mathfrak{A}$ mit dem Verteilungsparameter Null entsteht; übrigens sieht man unmittelbar

$$q_{4u} = q_{5u} = q_{6u} = 0\,,$$

weil sich der Strahl s um den Ursprung zu drehen beginnt, sobald er die Fläche $\mathfrak{A}$ beschreibt. Also wird aus § 22, (46a)

$$P = \frac{v}{u} \sin\psi \,, \tag{139}$$

endlich als Ersatz der Gleichung (36a):

$$P = z \operatorname{tg}\psi \,. \tag{140}$$

Dieselben Vereinfachungen in der Parameterwahl lassen sich auch bei einem zylindrischen Strahl einer beliebigen Kongruenz erzielen, so daß auch hier die Gleichungen (138) bis (140) gelten.

Wir wollen jetzt die Umgebung eines zylindrischen Strahles mit derjenigen eines Strahles s eines hyperbolischen Netzes $\mathfrak{N}$ mit einer unendlich fernen Brennlinie (eines „speziellen hyperbolischen Netzes") vergleichen. Wir können s zur Z-Achse, seine Verbindungsebene mit der endlichen Brennlinie b zur XZ-Ebene machen; bildet dann diese mit der Ebene des Strahlbüschels $\mathfrak{B}$, dem s angehört, den Winkel ψ, so ist

$$q_1 = \sin u \cos\psi \,, \quad q_2 = \sin u \sin\psi \,, \quad q_3 = \cos u \tag{141}$$

die Parameterdarstellung von $\mathfrak{B}$. Bildet b mit der X-Achse den Winkel ω, so haben wir, um alle Strahlen von $\mathfrak{N}$ zu erhalten, mit $\mathfrak{B}$ noch die Translation

$$\mathfrak{x} = v \,, \quad \mathfrak{y} = 0 \,, \quad \mathfrak{z} = v \operatorname{tg}\omega$$

oder mit dem Zeigersystem die entgegengesetzte vorzunehmen. Nach Bd. I, § 41 haben wir also zur vollständigen Darstellung von $\mathfrak{N}$ zu (141) noch hinzuzufügen:

$$\begin{cases} q_4 = & v \sin u \operatorname{tg}\omega \sin\psi \\ q_5 = -v \sin u \operatorname{tg}\omega \cos\psi + v \cos u \\ q_6 = & v \sin u \sin\psi \,. \end{cases} \tag{142}$$

Wendet man auf diese Darstellung die Gleichungen (21a) und (46a) an, so erhält man genau (138) und (139) wieder. Dabei hat, wie zu erwarten, der Winkel ω keine Rolle gespielt. Setzen wir ferner an Stelle der unendlich fernen Brennlinie von $\mathfrak{N}$ eine endliche parallel zur Z-Achse in der Ebene des Büschels $\mathfrak{B}$, so erleiden dadurch die ersten Ableitungen der q für die Werte $u = v = 0$ keine Änderung.

Denn sowohl das Büschel $v = 0$ als das Parallelbüschel $u = 0$ gehören auch dem neuen Netze an. Also haben wir auch hier ∞^2 einander in s berührende Strahlennetze, deren Brennlinien beliebig aus je einem Büschel mit endlichem Scheitel und einem Parallelstrahlenbüschel ausgewählt werden können. Hierdurch ist die schon in § 27 angedeutete Sachlage bestätigt.

Satz 71: In einem zylindrischen Strahl einer beliebigen Kongruenz gibt es ∞^2 berührende hyperbolische Netze, worunter ∞^1 mit einer unendlich fernen Brennlinie.

Unter den letzteren nennen wir dasjenige das Hauptnetz, dessen endliche Brennlinie den Strahl s senkrecht schneidet. Wenn $\psi = \frac{\pi}{2}$ ist, so ist das Hauptnetz ein Normalennetz und wir nennen einen solchen Strahl einen „zylindrischen Normalstrahl", weil seine Brennebenen zueinander senkrecht stehen.

Wir haben noch eine Art von Strahlen zu betrachten: Wenn die Brennlinie eines parabolischen Netzes unendlich fern ist (wir nennen es dann „speziell parabolisch"), so zerfällt das Netz (Bd. I, § 55, e) in ∞^1 Parallelstrahlenbüschel in parallelen Ebenen der Stellung σ. Man sieht, unmittelbar, daß in der Umgebung eines bestimmten Strahles s für alle Fortschreitungsrichtungen (mit Ausnahme der im Parallelbüschel bleibenden) P einen konstanten endlichen Wert hat, während ϱ beliebig bleibt. Einen Strahl einer beliebigen Kongruenz, dessen Umgebung ebenso beschaffen ist, wollen wir „zylindrisch-parabolisch" nennen. Für einen solchen gibt es nurmehr ∞^1 berührende Strahlennetze, die sämtlich speziell parabolisch sind. Denn für die Korrelation auf der unendlich fernen Geraden der Stellung σ sind zwei Bedingungen gegeben, nämlich die Zuordnung zwischen der Richtung von s und der durch s gehenden Büschelebene und dieselbe Zuordnung zwischen den Nachbarelementen der Korrelation, die durch den Wert P vermittelt wird.

Wir haben die Definition der regulären Strahlen bisher nur für die nicht zylindrischen Strahlen aufgestellt (§ 20) und es fragt sich, ob wir die hier betrachteten Strahlen als singulär ansehen sollen. Dies wäre unnatürlich, weil dadurch solche Strahlengattungen getrennt würden, die durch pro-

jektive Transformation ineinander übergehen können. Wenn wir nämlich durch eine solche den einen Brennpunkt eines hyperbolischen Strahls ins Unendliche werfen, so erhalten wir einen zylindrischen Strahl. Analog geht aus einem parabolischen Strahl ein zylindrisch-parabolischer hervor. Wir wollen daher endgültig definieren: Regulär nennen wir jeden Strahl einer Kongruenz, für den ein*) berührendes nicht singuläres Strahlennetz existiert; alle anderen Strahlen nennen wir singulär. Wenn wir streng an dieser Definition festhalten, müssen wir auch die Brennlinie eines parabolischen Netzes zu den regulären Strahlen rechnen; für sie ist dieses Netz selbst das einzige berührende. Die Fortschreitungsrichtungen ihrer Umgebung sind durch die höchst einfachen Gleichungen (Bd. I, § 53, b) dargestellt:

$$P = 0\,, \quad z = \frac{1}{K} \operatorname{tg} \alpha\,.$$

Jeden Strahl, dessen Umgebung sich ebenso verhält, nennen wir einen „regulären Brennstrahl". Wir zählen nochmals die verschiedenen Arten (im Endlichen liegender) regulärer Strahlen auf: Die elliptischen (hierunter die isotropen), die hyperbolischen (hierunter die Normalstrahlen), die parabolischen, die zylindrischen (hierunter die zylindrischen Normalstrahlen), die zylindrisch-parabolischen, die regulären Brennstrahlen.

Unter den singulären Strahlen scheiden wir die „halbsingulären" (von den übrigen „eigentlich singulären") als diejenigen aus, bei denen alle Fortschreitungsrichtungen entweder in einem Strahlenbündel oder einem Strahlenfeld enthalten sind; man kann also sozusagen die eine Hälfte eines singulären Strahlennetzes als berührend betrachten. Im ersten Fall ist z konstant; dasselbe tritt auch bei zwei Arten regulärer Strahlen ein (den isotropen und den zylindrischen Normalstrahlen), aber hier kann P ein Wertekontinuum durchlaufen, während es bei den halbsingulären Strahlen erster Art für alle Richtungen Null ist. Die halbsingulären Strahlen zweiter Art treten beispielsweise bei den Kongruenzen auf, die von den Doppelsekanten einer Raum-

*) Und folglich unendlich viele mit einer einzigen gleich zu erwähnenden Ausnahme.

kurve gebildet werden und zwar als Verbindungslinien der Berührungspunkte einer doppelt berührenden Ebene.

Kummer hat (J. f. Math. Bd. 57) ein Beispiel einer Kongruenz mit einer Regelfläche voll singulärer Strahlen gegeben: Die gemeinsamen Tangenten zweier konfokalen Flächen zweiter Ordnung. Die Brennpunkte rücken für eine Tangente der Schnittlinie zusammen. Aber ein parabolischer Strahl könnte dadurch nur entstehen, wenn auch die Brennebenen zusammenrückten; diese werden aber im Gegenteil senkrecht aufeinander. Ein anderes Beispiel folgt in Aufgabe 36.

Übungsaufgaben:

17. Die für den Hauptstrahl eines parabolischen Netzes charakteristischen Gleichungen (42) sind synthetisch abzuleiten.

18. Der Satz 48 ist synthetisch zu beweisen.

19. Die Ergebnisse des § 24, b sind auf anderem, elementarerem Wege abzuleiten.

20. Man beweise den Satz 50 auf folgendem Wege: Man schreibe die Gleichungen eines Rotationsnetzes als Schnitt zweier Gewinde:

$$q_4 + cq_1 = 0\,, \quad q_5 + cq_2 = 0\,,$$

verschiebe das Zeigersystem längs der X-Achse um x, drehe es endlich um die X-Achse, bis die Z-Achse in einen Strahl des Netzes fällt. Dann suche man die gemeinsamen Fortschreitungsrichtungen beider Gewinde und die extremen Lagen der möglichen Zentralpunkte der Regelflächen des Netzes.

21. Die Gleichung der Grenzfläche eines allgemeinen Strahlennetzes ist abzuleiten.

22. Die Krümmungsflächen und die Hauptflächen eines parabolischen Netzes sind zu suchen.

23. Die Differentialgleichung der Flächen ist abzuleiten, deren Zentralebenen mit einer der zugehörigen Krümmungsebenen einen konstanten Winkel α bildet.

24. Die Verteilungsparameter von Regelflächen mit gemeinsamem Zentralpunkt haben für einen und denselben Kongruenzstrahl eine konstante Summe.

25. Die Bedingung $\frac{R}{U} = \frac{T}{V}$, die in (102) auftritt, ist für sich allein zu deuten.

26. Die Bedingung dafür, daß die Parameterflächen komplementär sind (oder daß ihre Zentralpunkte zusammenfallen), ist:

$$\frac{S}{W} = \frac{1}{2}\left(\frac{R}{U} + \frac{T}{V}\right).$$

27. Die Mitteleinhüllende des hyperbolischen Netzes ist zu bestimmen.

28. Die isotropen Schraubungskongruenzen sind zu suchen.

29. Die Gleichungen der Flächen konstanter Umgebungsform (§ 31) sind bei einer beliebigen Kongruenz aufzustellen.

30. Die Flächen konstanter Umgebungsform und die konstanter Umgebungsgröße sind bei den Strahlennetzen zu suchen.

31. Die Normalschnitte einer Regelfläche konstanter Neigung (§ 23) sind Ellipsen.

32. Das Beispiel für die halbsingulären Strahlen zweiter Art (§ 34) ist ins duale Gebiet zu übertragen.

33. Für die Fläche (92) (Grenzfläche des parabolischen Strahlennetzes) ist der Ursprung ein höherer singulärer Punkt; der geometrische Ort der Tangenten in ihm ist zu suchen.

34. Die Gratlinien der abwickelbaren Flächen einer Normalenkongruenz sind geodätische Linien der Brennfläche der Kongruenz (Monge).

35. Sei P ein Punkt einer Kreislinie und E die Ebene durch P, die auf der Kreisebene senkrecht steht und den Kreis berührt. Es ist die Kongruenz der Strahlbüschel (P, E) analytisch darzustellen und zu zeigen, daß jeder Strahl parabolisch ist.

36. Das vorige Beispiel läßt sich dahin verallgemeinern: Wenn man einen Punkt P eine Kurve C beschreiben läßt und eine Ebene E stets durch die Tangente von C in P gehen läßt, so ist die Kongruenz aus sämtlichen Büscheln (P, E) parabolisch.

III. Abschnitt.

Allgemeine Theorie der Komplexe.

§ 35. Die Arten von Komplexstrahlen.

Sei durch eine homogene irreduzible Gleichung n-ten Grades

$$F(p_1, \ldots p_6) = 0 \tag{1}$$

ein algebraischer Komplex C gegeben*). Wir betrachten die Umgebung eines bestimmten Strahles q_i und eine durch q_i gehende, in C enthaltene Regelfläche. Wir bezeichnen die Ableitungen der p nach einem unabhängigen Parameter t an der Stelle q_i mit q_i', q_i'' ... und setzen

$$p_i = q_i + q_i' h + \tfrac{1}{2} q_i'' h^2 + \ldots$$

in (1) ein:

$$\sum \frac{\partial F}{\partial p_i}(q_i' h + \tfrac{1}{2} q_i'' h^2 + \ldots)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum \frac{\partial^2 F}{\partial p_i \partial p_k}(q_i' h + \ldots)(q_k' h + \ldots) + \ldots = 0 .$$

*) Zwei algebraische Gleichungen in Punktzeigern können, auch wenn sie beide irreduzibel sind, doch ein zerfallendes algebraisches Gebilde darstellen. Z. B. kann der Schnitt zweier Flächen zweiter Ordnung aus einer gemeinsamen Erzeugenden und einer Kurve dritter Ordnung bestehen und um letztere rein darzustellen, muß man eine dritte Fläche zweiter Ordnung, d. h. im Ganzen drei Gleichungen zu Hilfe nehmen. Analog haben wir in der Liniengeometrie neben (1) immer die Gleichung

$$p_1 p_4 + p_2 p_5 + p_3 p_6 = 0 \tag{α}$$

oder eine äquivalente. Es ist also die Frage nicht müssig: Kann jeder algebraische Komplex durch eine einzige Gleichung (außer α) rein dargestellt werden? Diese Frage ist von Klein (Math. Ann. XXII) bejahend beantwortet worden.

Indem wir die Koeffizienten aller Potenzen von h Null setzen und

$$\frac{\partial F}{\partial p_i} = F_i\,, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial p_i\,\partial p_k} = F_{ik} \ldots$$

bezeichnen, erhalten wir für die q', q'' ... die Bedingungen:

$$\sum_1^6 F_i q_i' = 0\,, \tag{2}$$

$$\sum_1^6 F_i q_i'' + \sum_{i=1}^6 \sum_{k=1}^6 F_{ik} q_i' q_k' = 0\,, \tag{3}$$

. . . . . .

wobei in die Symbole F die konstanten Werte q einzusetzen sind. Daneben folgen aus

$$R(p) = \sum_1^3 p_i p_{i+3} = 0 \tag{4}$$

die Bedingungen (die Indizes sind mod 6 zu nehmen):

$$\sum_1^6 q_{i+3} q_i' = 0\,, \tag{5}$$

$$\sum_1^6 (q_{i+3} q_i'' + q_{i+3}' q_i') = 0\,, \tag{6}$$

. . . . . .

Durch die Werte von q_i und q_i' ist eine von q ausgehende Fortschreitungsrichtung im Linienraum (§ 19) bestimmt, weil durch diese Werte sowohl Zentralpunkt als Zentralebene (§ 2) als endlich Verteilungsparameter (§ 3) der Regelfläche an der Stelle q bestimmt sind*). Von diesen drei Elementen allein hängt aber die Fortschreitungsrichtung ab, wie aus ihrer Definition in § 19 unmittelbar folgt. Aus der Beschränkung (2) müssen wir also die in C enthaltenen Richtungen entnehmen können. Diese Bedingung ist dieselbe, als ob wir vom linearen Komplex

$$\Sigma F_i p_i = 0 \tag{7}$$

*) Dies wurde an den erwähnten Stellen für rechtwinklige Linienzeiger bewiesen, gilt aber auch für tetraedrische, da diese mit den rechtwinkligen durch homogene lineare Gleichungen zusammenhängen (Bd. I, § 40). Wir dürfen ferner voraussetzen (was nur Sache der Parameterwahl ist), daß nicht alle q' verschwinden.

ausgegangen wären. Nun müssen wir vier Fälle unterscheiden:

I. Kann dieser lineare Komplex ein Gewinde sein.

II. Kann er ein Strahlengebüsch sein, ohne daß jedoch die sechs Gleichungen

$$F_i = \varrho\, q_{i+3} \quad (\varrho \text{ ein Proportionalitätsfaktor}) \tag{8}$$

erfüllt sein sollen.

III. Können diese Gleichungen erfüllt sein.

IV. Können alle F_i verschwinden.

Im ersten Fall nennen wir den Strahl q regulär, in allen anderen Fällen singulär, und zwar im zweiten Fall einen gewöhnlichen singulären, im dritten und vierten Fall einen höheren singulären Strahl. Von II. ist der Fall III. deshalb abzusondern, weil hier (2) mit der für alle Richtungen geltenden Gleichung (5) identisch wird, so daß man die Gleichung (3) heranziehen muß, um eine für die Richtungen von C charakteristische Bedingung zu finden. Jetzt lassen sich nämlich aus (3) mit Hilfe von (8) und (6) die q_i'' eliminieren: Setzt man

$$F_{i,\,i+3} - \varrho = c_{i,\,i+3}\,,$$

im übrigen jedoch $F_{ik} = c_{ik}$, so tritt

$$\Sigma c_{ik}\, q_i' q_k' = 0 \tag{9}$$

an Stelle von (2). Auch im Falle IV. wird (3) unmittelbar eine quadratische Bedingung für die q' allein.

Höhere singuläre Strahlen kommen im allgemeinen in einem beliebigen Komplex nicht vor. Denn die Gleichungen (8) geben fünf (also zwei überzählige) Bedingungen. Aus Bd. I, S. 130 folgt ohne Ausnahme:

Satz 72: Ein Strahl ist singulär oder regulär, je nachdem seine Zeiger die Gleichung

$$\sum_1^3 F_i\, F_{i+3} = 0 \tag{10}$$

erfüllen oder nicht.

Wenn die Funktion F ein Teiler der linken Seite von (10) ist, sind alle Strahlen des Komplexes singulär; dies kann wirklich vorkommen (§ 45). Hiervon abgesehen sind die

singulären Strahlen der Schnitt von (1) und (10), also (Bd. I, Satz 64):

Satz 73: Die singulären Strahlen eines Komplexes n-ter Ordnung bilden (wenn sie nicht alle singulär sind) eine Kongruenz vom Grade $2n(n-1)$.

---

§ 36. Unbestimmtheiten der Darstellung.

a) Wir müssen die Abzählung der Bedingungen für die q' mit der uns schon bekannten Dimension der Fortschreitungsrichtungen im Linienraume in Einklang bringen und wollen die Sachlage zunächst durch eine Analogie im Punktraum erläutern: Das Strahlenbündel mit dem Ursprung als Scheitel enthält alle Richtungen; wir können eine solche durch drei homogene Zeiger $x:y:z$, d. h. durch irgend einen Punkt P der betreffenden repräsentierenden Geraden g darstellen. Um eine Nachbarrichtung g' darzustellen, müssen wir vom Punkte P zu einem Punkte Q der Geraden g' übergehen und haben dazu ein ganzes Strahlbüschel von Richtungen zur Verfügung. Es ist also den Größen x', y', z' (Ableitungen nach t) nur eine Beschränkung von der Form

$$ax' + by' + cz' = 0$$

auferlegt. Auch bei fest gewählten absoluten Beträgen von x, y, z gibt es noch ∞^2 Wertesysteme von x', y', z', die den gewünschten Übergang bewerkstelligen, weil wir ∞^1 brauchbare Richtungen PQ haben und zur Definition einer einzelnen nur die Verhältnisse $x':y':z'$ in Betracht kommen. Die letztere Unbestimmtheit hängt mit der Willkür in der Parameterdarstellung einer Kurve zusammen; um die erstere zu beseitigen, könnte man eine willkürliche Bedingung, z. B.

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

hinzufügen.

Analog im Linienraum: Da die Linienzeiger samt ihren absoluten Beträgen tatsächlich Stäbe bedeuten, kann man von einer Geraden g zu einer Nachbargeraden g', auch wenn man die Beträge der Zeiger q von g fest gewählt hat, noch in mannigfacher Weise fortschreiten, indem man die Länge des Stabes auf g' willkürlich wählen kann. Will

man diese Unbestimmtheit beseitigen, so kann man sich z. B. auf Einheitsstäbe beschränken

$$q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1 ,$$

was für die q' die neue Bedingung

$$\sum_1^3 q_i q_i' = 0 \tag{11}$$

mit sich bringt. Oder man fügt (in projektiven Untersuchungen) mitunter eine Gleichung

$$\sum_1^6 k_\nu q_\nu' = 0 \tag{12}$$

mit willkürlichen Koeffizienten k hinzu (Gleichung (11) kann als Spezialfall von (12) betrachtet werden). Man muß dann trachten, diese aus dem Ergebnis wieder zu beseitigen (Beispiele bei Voss, Math. Ann. Bd. 8). Es bleibt dann noch die Unbestimmtheit bestehen, die in der Parameterdarstellung der Regelfläche $q_i(t)$ liegt. Diese in Verbindung mit den Bedingungen (5) und (11) (oder (12) oder einer stellvertretenden) läßt dann in der Tat nurmehr ∞^3 Richtungen im Linienraum zu, wie es sein muß. Kommt eine Komplexgleichung hinzu, so bleiben wegen (2) nurmehr ∞^2 übrig.

b) Die Gleichung eines algebraischen Komplexes kann in mannigfachen Formen geschrieben werden. Wenn nämlich M eine beliebige homogene Funktion der p vom $n-2$-ten Grade ist und

$$\Phi = F + MR ,$$

so wird durch

$$\Phi = 0 \tag{1a}$$

derselbe Komplex wie durch $F = 0$ dargestellt, weil nach (4) für alle Linienzeiger $R = 0$ wird. Ebenso ist für die Linienzeiger eines Komplexstrahles:

$$\Phi_i = F_i + M p_{i+3} , \tag{13}$$

$$\sum_1^3 \Phi_i \Phi_{i+3} = \sum_1^3 F_i F_{i+3}$$

wegen

$$\sum_1^6 p_i F_i = nF .$$

Wenn die Bedingung (8) erfüllt ist, so gilt

$$\Phi_i = (\varrho + M)\, q_{i+3} . \tag{14}$$

Man sieht also, daß die Kennzeichen für die regulären und gewöhnlichen singulären Strahlen durch die Unbestimmtheit*) der Komplexgleichung nicht berührt werden. Dagegen fließen die Fälle III und IV ineinander, weshalb wir innerhalb der höheren singulären Strahlen**) vorläufig keine Unterschiede gemacht haben. Es gilt geradezu:

Satz 74: Die Gleichung jedes algebraischen Komplexes kann so geschrieben werden, daß für einen bestimmten etwa vorhandenen höheren singulären Strahl alle F_i verschwinden.

Denn die Funktion M kann so gewählt werden, daß sie an der Stelle $p_i = q_i$ den Wert $-\varrho$ annimmt, der bei einer bestimmten Wahl der q_i ein bestimmter numerischer Wert ist.

In der homogenen Funktion n-ten Grades von sechs Veränderlichen treten ebensoviel Glieder auf als in der Potenz

$$\left(\sum_1^6 a_\nu p_\nu\right)^n$$

also $\binom{n+5}{5}$; vgl. Netto, Kombinatorik, § 36. Hiervon können jedoch $\binom{n+3}{5}$ passend gewählte wegen der Willkürlichkeit von M auf beliebig vorgegebene Beträge gebracht werden und außerdem ist wegen der Homogeneität eine Konstante abzuziehen; ferner ist es für einen Komplex eine einfache Bedingung, durch eine Gerade zu gehen. Also:

Satz 75: Der Komplex n-ten Grades hängt von

$$\tfrac{1}{1\,2}(n+1)(n+2)^2(n+3) - 1$$

*) Sie ist analog der Unbestimmtheit, die bei der Darstellung einer Raumkurve eintritt, die als Schnitt zweier algebraischen Flächen definiert ist. Diese Flächen $F = 0$, $G = 0$ können durch zwei beliebige des Büschels $F + \lambda G = 0$ ersetzt werden.

**) Sie werden gewöhnlich schlechtweg „Doppelstrahlen" genannt; dies ist ebenso bedenklich, als wenn man alle singulären Punkte der algebraischen Kurven (auch die Rückkehrpunkte und mehrfachen Punkte) Doppelpunkte nennen wollte.

Konstanten (der quadratische von 19 Konstanten) ab und ist durch ebensoviele allgemein liegende Gerade bestimmt*).

Wir wenden uns zur Frage, ob es unter diesen unendlich vielen Formen der Gleichung eines Komplexes eine ausgezeichnete gibt.

---

§ 37. Die Normalform von Clebsch.

Man kann die Funktion F symbolisch als n-te Potenz einer linearen Form schreiben

$$(15)\quad \sum a_{ikl\ldots}\, p_i p_k p_l \ldots = \left(\sum_1^6 a_\nu p_\nu\right)^n \quad (i, k, l \ldots = 1, \ldots 6),$$

wenn man nach Ausrechnung der Potenz jedes Produkt $a_i a_k a_l \ldots$ durch den entsprechenden Koeffizienten $a_{ikl\ldots}$ ersetzt. Es fragt sich, ob man bei dieser symbolischen Darstellung von F die Koeffizienten a_ν der linearen Form als Zeiger einer Geraden (eines speziellen linearen Komplexes) auffassen darf, d. h. der Relation

$$(16)\qquad \Sigma a_\nu\, a_{\nu+3} = 0$$

unterworfen. Nun hat eine solche symbolische Gleichung (15) allerdings keine arithmetische Bedeutung und man kann überhaupt nicht von bestimmten numerischen Werten der a_ν sprechen. Dennoch hat die eben aufgeworfene Frage einen guten Sinn: Jeder homogenen Relation n-ten Grades zwischen den a_ν als beliebigen Linienzeigern entspricht nach der Ersatzregel eine lineare Relation zwischen den $a_{ikl\ldots}$, die wirklich bestehen muß, wenn diese Regel zu richtigen Ergebnissen führen soll. Z. B. entspricht bei den Komplexen dritten Grades der Relation

$$(a_1 a_4 + a_2 a_5 + a_3 a_6)\, a_1 = 0$$

*) Was bei derartigen Sätzen unter „allgemein liegend“ zu verstehen ist, bedarf freilich jedesmal einer näheren Untersuchung.

die folgende zwischen den wirklichen Größen a*):

$$a_{114} + a_{125} + a_{136} = 0 .$$

Die Frage geht also dahin, ob durch geeignete Wahl der Funktion M die Gleichung des Komplexes so geschrieben werden kann, daß alle Relationen zwischen den Koeffizienten, zu denen man durch Anwendung des angedeuteten Verfahrens gelangen kann, erfüllt sind. Sie ist von Clebsch, (Math. Ann. II) durch eindeutige Herstellung seiner Normalform bejahend beantwortet worden. Wir beschränken uns auf die quadratischen Komplexe: Die einzige quadratische Relation zwischen den a ist eben (16); ihr entspricht:

$$a_{14} + a_{25} + a_{36} = 0 . \tag{17}$$

Wenn sie ursprünglich nicht erfüllt ist, setze man $2a_{ik} + M$ an Stelle jedes Koeffizienten in (17) und erhält hieraus:

$$M = -\tfrac{2}{3}(a_{14} + a_{25} + a_{36}) .$$

Wenn also

$$F = \Sigma a_{ik} p_i p_k = 0 \qquad (i, k = 1, \ldots 6)$$

die Komplexgleichung in beliebiger Form ist, so ist

$$F - \frac{2R}{3}(a_{14} + a_{25} + a_{36}) = 0$$

die „Clebschsche Normalform“. Ihre Bedeutung für das symbolische Rechnen beruht zunächst darauf, daß man nun die Koeffizienten a_ν ebenso wie die p_i durch zweigliedrige Determinanten aus anderen Symbolen ersetzen kann, die Punkt- oder Ebenenzeiger bedeuten.

---

*) Dabei sind, um den ganzen Koeffizienten von $p_\lambda p_\mu \ldots$ zu erhalten, die Größen a mit gleichen Marken $\lambda, \mu \ldots$, die aber in verschiedener Reihenfolge auftreten, einander gleichzusetzen. Die wirklichen Koeffizienten gehen also aus den a durch Multiplikation mit gewissen Polynomialkoeffizienten hervor.

§ 38. Die Haupt-Korrelation eines regulären Komplexstrahles.

Wir fassen einen algebraischen Komplex $\mathfrak{C}$ ins Auge und einen bestimmten regulären Strahl s desselben. Jedem Punkt P auf s entspricht ein Komplexkegel K und im allgemeinen längs s eine einzige Berührungsebene E desselben. Den Punkten auf s sind so Ebenen durch s zugeordnet (Fig. 13). Dual entspricht jeder Ebene durch s eine Komplexkurve C und auf s ein Berührungspunkt derselben. Den Ebenen durch s sind so Punkte auf s zugeordnet. Es ist geometrisch naheliegend und wird analytisch bestätigt werden, daß diese Zuordnung in beiden Fällen dieselbe ist. Denn s und eine Nachbarerzeugende von K liegen auch in einer Ebene E. Ihr Schnittpunkt (die Kegelspitze) ist also auch zugleich der Berührungspunkt von C mit s. Wir könnten aus § 35 entnehmen, daß diese Zuordnung eine Korrelation ist. Denn da die in $\mathfrak{C}$ enthaltenen Richtungen dieselben sind wie die des Gewindes (7), so gilt dies auch insbesondere für die schneidenden Nachbarstrahlen, die bei einem Gewinde ein parabolisches Strahlennetz bilden (Bd. I, Satz 76 und § 53, b). Wir wollen aber diesen wichtigen Gegenstand nochmals unabhängig von § 35 untersuchen, weil das Ergebnis zum Teil auch für singuläre Strahlen verwertbar sein wird.

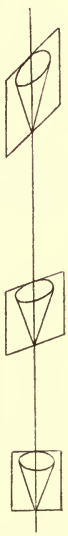

Fig. 13.

Es sei

$$F(p_1, \ldots p_6) = 0 \tag{1}$$

die Gleichung n-ten Grades von $\mathfrak{C}$,

$$F_i = \frac{\partial F}{\partial p_i}$$

und (Bd. I, § 33)

$$\begin{cases} p_1 = x_1 y_2 - x_2 y_1 & p_4 = x_3 y_1 - x_4 y_3 \\ p_2 = x_1 y_3 - x_3 y_1 & p_5 = x_4 y_2 - x_2 y_4 \\ p_3 = x_1 y_4 - x_4 y_1 & p_6 = x_2 y_3 - x_3 y_2 \,. \end{cases} \tag{18}$$

Dann ist

$$F(x_1 y_2 - x_2 y_1, \ldots) = 0 \tag{19}$$

in den laufenden Zeigern y die Gleichung des Komplexkegels (Bd. I, § 42) für den Punkt x; seine Berührungsebene hat in den laufenden Zeigern ξ die Gleichung:

$$\sum_1^4 \frac{\partial F}{\partial y_\lambda} \xi_\lambda = \sum_1^4 u_\lambda \xi_\lambda = 0 .$$

Nun ist

$$\frac{\partial F}{\partial y_\lambda} = \sum_{i=1}^{6} F_i \frac{\partial p_i}{\partial y_\lambda}$$

und für die Ableitungen der p nach den y gilt folgendes Schema:

(20)

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
y_1	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	0	0	0
y_2	x_1	0	0	0	x_4	$-x_3$
y_3	0	x_1	0	$-x_4$	0	x_2
y_4	0	0	x_1	x_3	$-x_2$	0

Also ist

(21)
$$\begin{cases} \varrho u_1 = & -x_2 F_1 - x_3 F_2 - x_4 F_3 \\ \varrho u_2 = x_1 F_1 & - x_3 F_6 + x_4 F_5 \\ \varrho u_3 = x_1 F_2 + x_2 F_6 & - x_4 F_4 \\ \varrho u_4 = x_1 F_3 - x_2 F_5 + x_3 F_4 , & \end{cases}$$

wobei in die F die Zeiger p_i des Strahles s einzusetzen sind. Dual ist

(22) $$F(u_3 v_4 - u_4 v_3 , \ldots) = 0$$

in den laufenden Zeigern v die Gleichung der Komplexkurve für die Ebene u; ihr Berührungspunkt ist in den laufenden Ebenenzeigern η:

$$\sum_1^4 \frac{\partial F}{\partial v_\lambda} \eta_\lambda = \sum x_\lambda \eta_\lambda = 0 .$$

Das Schema der Ableitungen der p nach den v erhält man aus (20), indem man alle Symbole x durch u ersetzt und die Indizes der p um drei ändert. Die Zeiger des Berührungspunktes der Komplexkurve mit s in der Ebene u

erhält man also aus (21), indem man die x mit den u vertauscht und die Indizes aller F um drei ändert:

$$(23)\quad \begin{cases} \sigma x_1 = & -u_2 F_4 - u_3 F_5 - u_4 F_6 \\ \sigma x_2 = u_1 F_4 & - u_3 F_3 + u_4 F_2 \\ \sigma x_3 = u_1 F_5 + u_2 F_3 & - u_4 F_1 \\ \sigma x_4 = u_1 F_6 - u_2 F_2 + u_3 F_1 & \end{cases}$$

Die Determinante sowohl des Systems (21) als (23) hat (Bd. I, S. 131) den Wert

$$(F_1 F_4 + F_2 F_5 + F_3 F_6)^2,$$

ist also für einen regulären Strahl von Null verschieden; für einen solchen sind die Gleichungen (23) dieselben, die man auch durch Auflösung des Systems (21) nach den x erhält und daraus folgt für reguläre Strahlen die anfangs gemachte Bemerkung über die Identität beider Zuordnungen. Die Gleichungen (21) definieren ein Nullsystem (Bd. I, § 46, Gleichungen 15 a). Die Zuordnung der Punkte und Ebenen von s ist dieselbe wie in diesem Nullsystem, also (Bd. I, § 53, b):

Satz 76: Auf jedem regulären Strahl s eines algebraischen Komplexes sind den Punkten von s die längs s ihre Komplexkegel berührenden Ebenen und den Ebenen durch s die Berührungspunkte ihrer Komplexkurven mit s zugeordnet. Diese Zuordnung ist in beiden Fällen dieselbe und ist eine Korrelation; sie heiße Hauptkorrelation.

---

§ 39. Die singulären Strahlen, Punkte und Ebenen.

Wir setzen jetzt voraus, s sei ein singulärer Strahl, also

$$(10)\qquad \Sigma F_i F_{i+3} = 0\,.$$

Auch dann ordnen die Gleichungen (21) einem Punkte x auf s eine bestimmte Ebene zu, außer wenn für diesen Punkt alle rechten Seiten verschwinden. In letzterem Fall wird die Berührungsebene unbestimmt und s ist ein singulärer Strahl des Komplexkegels von x.

Nun lassen sich die F_i wegen (10) als Zeiger einer Geraden g deuten und zwar wollen wir sie als Achsenzeiger

betrachten, während die p Strahlenzeiger waren. Die Strahlenzeiger g_λ von g sind also:

$$g_i = F_{i+3}\,. \tag{24}$$

Dann bedeutet

$$\sum_1^6 p_i F_i = n F = 0\,, \tag{25}$$

daß sich s und g stets schneiden; diese zwei Strahlen können aber auch identisch sein, wenn nämlich (8) für die p erfüllt ist:

$$p_i = \varrho F_{i+3}\,. \tag{8a}$$

Setzt man die Werte (24) in (21) ein, so erhält man (Bd. I, § 38) rechts die linken Seiten der Inzidenzbedingungen zwischen x und g. Die u verschwinden also, je nachdem (8a) erfüllt sind oder nicht, für alle oder für einen einzigen Punkt (den Schnitt s, g) auf s.

Satz 77: Je nachdem ein singulärer Strahl s zu den gewöhnlichen oder zu den höheren gehört, ist s für den Komplexkegel eines oder aller seiner Punkte singulärer Strahl (im allgemeinen Doppelstrahl) und zugleich für die Komplexkurve einer oder aller seiner Ebenen singuläre Tangente (im allgemeinen Doppeltangente).

Für einen gewöhnlichen singulären Strahl s ist die Ebene u davon unabhängig, wie man den Punkt x auf s verschiebt. Denn aus (21) folgt:

$$\begin{cases} \qquad\quad u_2 F_4 + u_3 F_5 + u_4 F_6 = 0 \\ u_1 F_4 \qquad - u_3 F_3 + u_4 F_2 = 0 \\ u_1 F_5 + u_2 F_3 \qquad\quad - u_4 F_1 = 0 \\ u_1 F_6 - u_2 F_2 + u_3 F_1 \qquad\quad = 0\,. \end{cases} \tag{26}$$

Dies sind aber die Inzidenzbedingungen zwischen u und g (Bd. I, § 38); u ist also als Verbindungsebene von s und g vollkommen bestimmt. Zugleich sieht man aus (23), daß u (wie ja geometrisch naheliegend) diejenige einzige Ebene durch s ist, für die der zugeordnete Punkt x unbestimmt wird. Wir nennen eine Ebene, deren Komplexkurve als Strahlengebilde eine Singularität hat (Doppeltangente, Wendetangente, mehrfache Tangente), eine singuläre Ebene und einen Punkt, für den der Komplexkegel eine Singularität hat (Doppelstrahl,

Rückkehrstrahl, mehrfacher Strahl), einen singulären Punkt. Dann können wir die letzten Ergebnisse so aussprechen:

Satz 78: Jedem gewöhnlichen singulären Strahl s ist durch die Inzidenz mit einem zweiten Strahl (24) ein singulärer Punkt S und eine singuläre Ebene σ zugeordnet; S ist allen Ebenen des Strahles s (außer σ) als Berührungspunkt ihrer Komplexkurven und σ allen seinen Punkten (außer S) als Berührungsebene ihrer Komplexkegel zugeordnet.

Natürlich werden im allgemeinen auf s noch andere singuläre Punkte liegen, aber der singuläre Strahl ihres Komplexkegels muß von s verschieden sein; analog dual. Man nennt daher S und σ die zugeordneten singulären Elemente des Strahles s. Ihre Zeiger kann man nach Bd. I, § 39, b) berechnen. Z. B. erhält man die Zeiger von S aus der ersten Spalte*) des dortigen Schemas (46):

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \sum_1^3 p_\lambda F_\lambda : (6, 2) : (4, 3) : (5, 1),$$

wobei $(i, k) = p_i F_k - p_k F_i$ bedeutet.

Ändert man die Komplexgleichung nach § 36, b), so ändert sich auch g, bleibt aber wegen (13) im selben Büschel (s, g), so daß die vorhergehenden Überlegungen nicht gestört werden.

---

§ 40. Die Singularitätenfläche und die akzessorische Fläche.

Wir nennen die Kongruenz der singulären Linien eines Komplexes kürzer auch die „Singularitätenkongruenz“ $\mathfrak{S}$ des Komplexes, fassen einen ihrer Strahlen s ins Auge und wollen zeigen, daß der Strahl g des vorigen Paragraphen als Brennstrahl eines Strahlennetzes betrachtet werden kann, das $\mathfrak{S}$ in s berührt. In der Tat enthält ein solches berührendes Netz alle Richtungen im Linienraum, die von s ausgehen und zugleich in den Komplexen

$$F = 0$$

und

$$\sum_1^3 F_i F_{i+3} = 0 \tag{10}$$

*) Sollte die erste Spalte versagen, so muß eine andere zum Ziel führen.

enthalten sind. Nun sind die Richtungen des ersten Komplexes nach § 35 mit den Richtungen von

$$\Sigma F_i p_i = 0 \tag{7}$$

identisch. Diese Gleichung bedeutet für einen singulären Strahl s ein Strahlengebüsch $\mathfrak{G}$ mit der Achse g. Was für eine Kongruenz nun auch aus $\mathfrak{G}$ durch einen zweiten Komplex $G = 0$ herausgeschnitten werden mag, es wird zur Bestimmung der gemeinsamen Richtungen immer zu (7) noch eine andere derartige Gleichung

$$\Sigma G_i p_i = 0 \tag{7a}$$

hinzutreten; sie ließe sich, wenn $G = 0$ mit (10) identisch ist, leicht explizite aufstellen. Dann wäre durch (7) und (7a) ein Strahlennetz bestimmt, das die Singularitätenkongruenz in s berührt. Um seine Brennlinien zu finden, hat man die singulären Komplexe des Komplexbüschels

$$\Sigma(F_i + \lambda G_i) p_i = 0 \tag{27}$$

zu suchen (Bd. I, § 53). Aber der eine ist (7) selbst; es ist also auch die eine Brennlinie unmittelbar bekannt, nämlich g. Nennen wir, wie im vorigen Paragraphen, S den Scheitel und σ die Ebene des Strahlenbüschels (s, g), so folgt aus § 23 und § 27, daß S der eine Brennpunkt und σ die eine Brennebene des Strahles s als Kongruenzstrahles von $\mathfrak{S}$ ist; und zwar berührt σ denjenigen Mantel der Brennfläche, auf dem auch S liegt. Den anderen Brennpunkt und die andere Brennebene finden wir am einfachsten durch folgende Überlegung: Der Komplex (10) definiert, da s für ihn im allgemeinen regulär ist, auf s eine Hauptkorrelation; in dieser möge dem Punkte S die Ebene ε, der Ebene σ der Punkt Q entsprechen (Fig. 14). Da nun die schneidenden Richtungen des Komplexes F durch die Nachbarstrahlen von s im Bündel S und im Felde σ repräsentiert werden, so sind die gemeinsamen schneidenden Richtungen beider Komplexe F und (10) durch die Nachbarstrahlen von s in den beiden Büscheln (S, ε) und (Q, σ) repräsentiert. Wenn s auch in (10) singulär ist, so wird Q

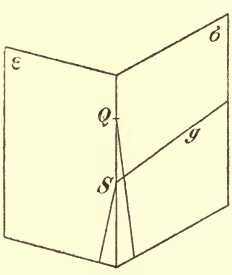

Fig. 14.

der singuläre Punkt und ε die singuläre Ebene von s in (10) und die Schlüsse bleiben bestehen, solange Q von S und ε von σ getrennt bleiben. Wir finden also nochmals S und σ als Brennelemente, ferner Q als zweiten Brennpunkt und ε als zweite Brennebene. Da die Brennfläche in jedem Brennpunkte von einer der zugehörigen Brennebenen berührt wird (Satz 55) und zwar, wie wir früher sahen, in S von σ, können wir sagen:

Satz 79: Der Ort der singulären Punkte eines Komplexes ist mit dem Umhüllungsgebilde der singulären Ebenen identisch und heißt „Singularitätenfläche". Diese Fläche ist der eine Mantel der Brennfläche der Singularitätenkongruenz. Der andere Mantel (die „akzessorische Fläche") ist der geometrische Ort der Punkte, die den singulären Ebenen auf den zugehörigen singulären Strahlen s durch den Komplex $G = \Sigma F_i F_{i+3} = 0$ zugeordnet werden; er wird zugleich (dual) von den Ebenen umhüllt, die durch G den singulären Punkten S als Berührungsebenen ihres Komplexkegels längs s zugeordnet werden.

Der erste Teil dieses Satzes wurde für quadratische Komplexe von Plücker (neue Geom. II, Art. 320), allgemein zuerst von Pasch (Zur Theorie der Komplexe und Kongruenzen von Geraden, Gießen, 1870 und strenger im 76. Bd. des Journ. f. Math.) bewiesen, von dem auch der zweite Teil herrührt.

Um die Ordnung und Klasse der Singularitätenfläche zu bestimmen, fragen wir, wann ein singulärer Punkt S auf einem beliebig gewählten Strahl q des Raumes liegt. Hierzu muß q sowohl den zu S gehörigen singulären Strahl s als auch den zu s gehörigen Strahl g (§ 39) schneiden. Wir erhalten also für die Zeiger p des gesuchten Strahles s die Bedingungen:

$$F(p) = 0\,, \tag{1}$$

$$\Sigma F_i F_{i+3} = 0\,, \tag{10}$$

$$\Sigma q_i F_i = 0\,, \quad \Sigma q_i p_{i+3} = 0\,,$$

$$\Sigma p_i p_{i+3} = 0\,.$$

Dieselben Bedingungen werden aber auch erfüllt, wenn die Verbindungsebene s, g, die eine Berührungsebene der Singu-

laritätenfläche ist, durch q geht. Die Zahl $4n(n-1)^2$ der gemeinsamen Lösungen der fünf Gleichungen ist also die Summe von Ordnung und Klasse der Singularitätenfläche. Aus dem dualen Charakter der allgemeinen Komplexgleichung folgt nun:

Satz 80: Die Ordnung und Klasse der Singularitätenfläche eines Komplexes n-ten Grades ist $2n(n-1)^2$.

---

§ 41. Die Umgebung eines regulären Komplexstrahles.

Von der Verteilung der schneidenden Nachbarstrahlen eines regulären Komplexstrahles p vermitteln die Ergebnisse des § 38 eine hinreichend klare Vorstellung. Denn jedem Punkte P von p ist durch die Haupt-Korrelation eine Ebene E, somit ein Strahlbüschel (P, E) zugeordnet und die Nachbarstrahlen von p in diesen Büscheln bestimmen Richtungen, die auch im Komplex enthalten sind. Da wir nun von diesen Korrelationen in Bd. I, § 53, b) eine Anschauung gewonnen haben, so haben wir auch eine Übersicht über die schneidenden Nachbarstrahlen von p. Wir wollen jetzt ebenso von den nichtschneidenden Nachbarstrahlen eine möglichst anschauliche Vorstellung gewinnen, die sich auch auf die metrischen Eigenschaften der Umgebung von p erstreckt. Da von jedem Strahl eines Komplexes nur ∞^2 in ihm enthaltene Richtungen ausgehen, muß zwischen den drei Zeigern z, α, P der Richtungen (§ 19) des Komplexes eine Beziehung bestehen, die wir nun aufsuchen wollen. Da ferner für einen regulären Strahl diese Richtungen dieselben sind, die im Strahlengewinde (7) vorkommen, so brauchen wir die Frage nur für dieses zu beantworten.

Wir denken uns ein Gewinde, dessen Achse in die Z-Achse fällt, durch die Gleichung (Bd. I, § 46)

$$\mathfrak{k}\, p'_3 + p'_6 = 0$$

gegeben und werden einen beliebigen Strahl s desselben, dessen Umgebung wir untersuchen wollen, zur neuen Z-Achse machen. Wir können voraussetzen, die positive X-Achse falle in den kürzesten Abstand $AB = c$ von Z und s. Wenn wir mit dem Zeigersystem zunächst die Schiebung AB vor-

nehmen und die neuen Zeiger p nennen, so lautet die neue Gleichung des Gewindes (Bd. I, § 41):

$$c\,p_2 + p_6 + \mathfrak{k}\,p_3 = 0\,.$$

Wir haben jetzt noch das Zeigersystem um den Winkel $(Z, s) = \vartheta$ zu drehen, wobei (Bd. I, § 1) $\operatorname{tg}\vartheta = \frac{\mathfrak{k}}{c}$, also:

$$\cos\vartheta = \frac{c}{\sqrt{c^2 + \mathfrak{k}^2}}\,, \qquad \sin\vartheta = \frac{\mathfrak{k}}{\sqrt{c^2 + \mathfrak{k}^2}}\,.$$

Wenn wir den positiven Wert der Wurzel wählen, so kommt dies darauf hinaus, diejenige Richtung in s zur endgültigen Z-Achse zu machen, welche mit der ursprünglichen Z-Achse einen absolut spitzen Winkel einschließt. Wenn q die neuen Zeiger heißen, so findet man schließlich mit Hilfe des Schemas 58, b) des § 41 (Bd. I) als Gleichung des Gewindes:

$$(c^2 + \mathfrak{k}^2)\,q_2 + \mathfrak{k}\,q_5 + c\,q_6 = 0\,. \tag{28}$$

Dabei kann c stets positiv angenommen werden.

Hier führen wir nach § 18 natürliche Zeiger ein und lösen nach a auf:

$$a = \sin\omega \cdot \frac{\mathfrak{k}\,z\sin\alpha - (c^2 + \mathfrak{k}^2)\cos\alpha}{\mathfrak{k}\cos\omega\cos\alpha + c\sin\omega}\,. \tag{29}$$

Dies ist die Gleichung des Gewindes in natürlichen Zeigern, bezogen auf einen allgemein liegenden Gewindestrahl als Zeigerachse, nämlich denjenigen, der in (28) Z-Achse ist. Die Ausgangsebene ist die Verbindungsebene der Zeigerachse mit ihrem kürzesten Abstand von der Gewindeachse, der Ursprung des natürlichen Zeigersystems ist der Fußpunkt dieses Abstandes. Für $c = 0$ erhalten wir die Gleichung des Gewindes, bezogen auf einen „Mittelstrahl", nämlich einen solchen, der die Gewindeachse schneidet:

$$a = \operatorname{tg}\omega\,(z\operatorname{tg}\alpha - \mathfrak{k})\,. \tag{29a}$$

Indem wir in (29) von den drei unabhängigen Veränderlichen z, α, ω die ersten zwei unbeschränkt lassen, ω auf eine Umgebung der Null beschränken, erhalten wir eine Darstellung der Umgebung von s. Von den in ihr enthaltenen Richtungen betrachten wir zuerst diejenigen, für die $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ist. Dann ist nach (29)

$$a = \frac{\mathfrak{k}\,z}{c}\,, \tag{30}$$

außer wenn auch ω von vornherein Null ist. Der letztere Fall entspricht einer Parallelverschiebung des Strahles in der Richtung der Gewindeachse, also $P = \infty$; sonst folgt aus (30) für das Zusammenfallen der Strahlen: $\lim z = 0$, während ω nach einem beliebigen Gesetz Null werden kann, wie auch unmittelbar aus bekannten Eigenschaften des Gewindes ersichtlich ist: Man kann s so bewegen, daß es fortwährend denselben Durchmesser des Gewindes schneidet und dabei beliebig parallel zur Stellung der Nullebenen der Schnittpunkte drehen, also ω von a unabhängig ändern. Ist also $\alpha = \frac{\pi}{2}$ der eine Zeiger einer Richtung, so ist von den beiden anderen entweder $P = \infty$ und z unbestimmt (was aber nur eine einzige, die „zylindrische" Richtung ausmacht) oder P beliebig und $z = 0$ (∞^1 Richtungen, unter denen auch die frühere vorkommt). Man sieht aus den geometrischen Eigenschaften des Gewindes unmittelbar, daß dieses Ergebnis auch für $c = 0$ richtig ist.

Wenn α von $\frac{\pi}{2}$ verschieden ist, erhalten wir aus (29):

$$P = \lim_{\omega = 0} \left(\frac{a}{\omega} \right) = z \operatorname{tg} \alpha - \frac{c^2 + \mathfrak{f}^2}{\mathfrak{f}} ; \tag{31}$$

setzen wir

$$\frac{c^2 + \mathfrak{f}^2}{\mathfrak{f}} = m , \tag{32}$$

so können wir die gesuchte Beziehung zwischen den Zeigern der Richtungen so schreiben*):

$$P = z \operatorname{tg} \alpha - m . \tag{33}$$

Sie hängt von einer einzigen Konstanten m ab. Für die schneidenden Strahlen ($P = 0$) muß sich aus (33) wieder die Korrelationsgleichung

$$z \operatorname{tg} \alpha = m \tag{34}$$

ergeben; vergleichen wir sie mit (66) in Bd. I, § 53, b), und bedenken, daß die Richtung α auf der Verbindungsebene mit dem schneidenden Nachbarstrahl senkrecht steht, so folgt, daß m und die dortige Konstante K zueinander reziprok sind (bis auf die verschiedenen Vorzeichen).

*) Diese Gleichung findet sich beiläufig schon bei Koenigs (Thèse, S. 59) auf anderem Wege abgeleitet.

Die Gleichung (33) ist die einfachste Darstellung der Umgebung eines regulären Komplexstrahles: Alle Richtungen, die durch eine Gleichung der Form

$$z \operatorname{tg} \alpha = \text{const.} = \varkappa \tag{35}$$

verknüpft sind, haben gleiche Verteilungsparameter $P = \varkappa - m$; (35) selbst stellt eine Korrelation um s dar, die wir uns versinnlichen wollen, indem wir das gleichseitige hyperbolische Paraboloid

$$z \cdot \frac{y}{x} = \varkappa$$

mit dem Zylinder

$$x^2 + y^2 = a^2$$

in einer Kurve C zum Schnitt bringen. Die Korrelation entsteht dann, indem wir jeden Punkt von C sowohl mit s durch eine Ebene verbinden als auch auf s projizieren. C ist eine Kurve vierter Ordnung, die in zwei kongruente Teile zerfällt, die zur Deckung gebracht werden können, indem man den einen auf dem Zylinder um π dreht. In Fig. 15 ist nur der eine Teil für ein positives $\varkappa$ gezeichnet. Halbiert man den Zylinder durch die XZ-Ebene, wickelt die eine Hälfte in eine Ebene ab, so entsteht ein Ast der bekannten Kurve

$$z = \varkappa \cot \alpha ,$$

wonach sich der Leser leicht ein Modell der Kurve C herstellen kann. Wählen wir nun einen Wert a, konstruieren für ein bestimmtes $\varkappa$ die Kurve C, berechnen ω aus der Gleichung

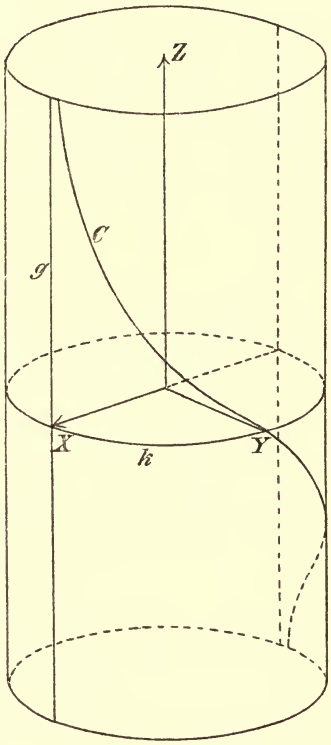

Fig. 15.

$$\frac{a}{\omega} = \varkappa - m , \tag{36}$$

bewegen schließlich eine Gerade so, daß sie stets mit s den konstanten Winkel ω bildet, stets Zylindertangente bleibt und daß ihr Berührungspunkt längs C fortgleitet, so erhalten wir für die ∞^1 Werte $\varkappa$ auf diese Art ∞^1 Kurven C*) und ∞^2 Geraden. Verbinden wir jede der letzteren mit s durch eine Schraubenfläche nach § 19, so repräsentieren diese Flächen die ∞^2 Richtungen, die im Komplex von s ausgehen. Ihre Strahlen in einer passend begrenzten Umgebung von s stellen annähernd den Komplex selbst in der Umgebung von s dar, ähnlich wie eine Fläche in der Umgebung eines Punktes durch die ∞^1 berührenden Linienelemente und die ∞^2 in ihnen enthaltenen Punkte ersetzt werden kann, solange es sich um Eigenschaften handelt, die bloß von den ersten Ableitungen der Zeiger abhängen. Wir nennen die Gesamtheit jener ∞^2 Schraubenflächen einen Berührungskomplex. Seine Gleichung ist also:

$$\frac{a}{\omega} = z \operatorname{tg}\alpha - m \,. \tag{37}$$

Dabei liegt es in der Natur der Sache, daß dieser Ersatz allerdings in einer Beziehung nicht so vollkommen ist, wie der analoge in der Flächentheorie: In einem regulären Flächenpunkt P kann man auf der Berührungsebene T eine Umgebung des Berührungspunktes so abgrenzen und die Punkte von T denen der Fläche selbst in diesem Gebiet so zuordnen, daß: 1. der Abstand je zweier zugeordneten Punkte unter einer gegebenen Grenze ε bleibt, 2. die Abgrenzung dadurch definieren, daß auf allen Richtungen durch P in T die gleiche Strecke σ aufgetragen wird, 3. daß $\lim \frac{\varepsilon}{\sigma}$ Null wird, wenn diese Größen selbst Null werden. Man kann also sagen, für die Größe des Bereiches, innerhalb dessen in einer bestimmten Richtung eine vorgegebene Annäherung erreicht wird, kann eine von der Richtung selbst unabhängige untere Grenze angegeben werden.

*) Aus einer von ihnen gehen die übrigen dadurch hervor, daß man alle Z-Zeiger im selben Verhältnis ändert, also durch eine spezielle affine Verwandtschaft. Nur für $P = -m$ tritt an Stelle der halben Kurve C, die zur Darstellung der Richtungen genügt, eine Gerade g und ein Halbkreis k; vgl. den Schluß dieses Paragraphen.

Dagegen wird sich beim Berührungskomplex B für gewisse Richtungen auch der Bereich ω der Null nähern, innerhalb dessen B eine hinreichende, vorgegebene Annäherung des ursprünglichen Komplexes $\mathfrak{C}$ darstellt, wie sie durch die gleichnamigen Zeigerunterschiede $a - a'$, $z - z'$, $\alpha - \alpha'$ zweier passend zugeordneten Strahlen von B und C, die etwa ihr ω gemein haben, gemessen werden kann (die gestrichelten Größen beziehen sich auf B). Man sieht dies unmittelbar ein, wenn man bedenkt, daß in $\mathfrak{C}$ auch eine Zylinderfläche Z durch s vorkommt, welche die in B enthaltene Zylinderfläche Z' durch s zwar längs s berührt, dann aber von ihr abweicht. Obgleich also ω für diese beiden Flächen, die mit gemeinsamer Richtung durch s gehen, immer Null ist, wird doch $\alpha - \alpha'$ endliche Werte annehmen. Man kann daher die Strahlen von Z und Z' einander nicht so zuordnen, daß durch ein hinreichend kleines Intervall für ω auch die Grenze für $\alpha - \alpha'$ unter einen gegebenen Betrag hinabgedrückt würde, noch weniger es so einrichten, daß auch noch $\lim \frac{\alpha - \alpha'}{\omega} = 0$ würde. Man könnte diesen Übelstand allerdings beseitigen, indem man für die Zylinderflächen $\left(\text{und auch in einer gewissen Umgebung des Wertes } \alpha = \frac{\pi}{2}\right)$ a statt ω zur unabhängigen Veränderlichen wählt, durch deren Abgrenzung auch der Bereich abgegrenzt wird. Dann würde aber ein ähnlicher Übelstand bei den Regelflächen auftreten, für die $P = 0$ ist, anstatt wie hier bei denjenigen, für die $P = \infty$ ist. Es besteht eine gewisse Analogie mit den Funktionen, die in einem Intervall zwar stetig, aber nicht gleichmäßig stetig sind. Wenn man jedoch die Richtungen ausschließt, die einer gewissen übrigens beliebig kleinen Umgebung des Wertes $\varkappa = m$ und des Wertes $\alpha = \frac{\pi}{2}$ entsprechen, so wird die Analogie mit der Flächentheorie vollkommen aufrecht zu erhalten sein. Unter derselben Einschränkung gilt der

Satz 81: Die Umgebungen aller regulären Strahlen beliebiger Komplexe teilen sich nach dem Vorzeichen von m in zwei Klassen. Die Umgebungen zweier beliebigen Strahlen derselben Klasse sind einander ähnlich.

Dies ist im selben Sinne zu verstehen, wie man bei konformer Abbildung von „Ähnlichkeit in den kleinsten Teilen“ spricht. Wendet man nämlich auf einen Berührungskomplex eine Ähnlichkeitstransformation mit dem Parameter k und dem Zentralpunkt*) von s als Zentrum an, so sind die Zeiger des neuen Strahles

$$a' = ka\,, \quad z' = kz\,, \quad \omega' = \omega\,, \quad \alpha' = \alpha\,.$$

Die neuen Strahlen genügen also der Gleichung

$$\frac{a'}{\omega'} = z' \operatorname{tg} \alpha' - km\,,$$

die wieder einen Berührungskomplex darstellt. Zwei beliebige Berührungskomplexe mit den Konstanten m und m' können daher dadurch kongruent gemacht werden, daß man den einen im Verhältnis $m' : m$ ähnlich mit sich selbst verändert. Ein Berührungskomplex ist also durch die Korrelation $z \operatorname{tg} \alpha = m$ eines parabolischen Strahlennetzes schon bestimmt. Der Satz 81 rechtfertigt es, wenn wir die Konstante m als „Umgebungsgröße“ des Strahles bezeichnen.

Wir richten unser Augenmerk noch auf den Wert $P = -m$, für den die Kurve C zerfällt. Die Gleichung (33) wird dann durch $\alpha = 0$ nebst einem beliebigen Werte z oder durch $z = 0$ nebst einem beliebigen Werte α erfüllt. Die erstere Annahme führt zu einem Parallelbüschel $\mathfrak{P}$ von Nachbarstrahlen, die den Zylinder der Figur 15 längs g berühren, die letztere zu einem Rotationshyperboloid von Nachbarstrahlen, die, wie wir sagen wollen, das „isotrope“ Richtungsbüschel**) des Komplexes bestimmen, während $\mathfrak{P}$ das „komplementäre“ Richtungsbüschel bestimmen möge.

In der Tat kann man sich diese Verhältnisse am Strahlengewinde unmittelbar anschaulich machen und zwar genügt es, wegen des Satzes 81 einen Mittelstrahl h des Gewindes zu nehmen: Wir wissen aus Bd. I, Satz 120, daß das Gewinde ein Rotationsnetz enthält, von dem h der

*) Wir übertragen die Bezeichnungen Zentralpunkt und Zentralebene (Bd. I, § 53, b) von der Hauptkorrelation eines Komplexstrahles auf diesen selbst und nennen die zur Zentralebene senkrechte Ebene der Hauptkorrelation die asymptotische Ebene sowohl der Korrelation als des Komplexstrahles.

**) Die allgemeine Definition des Begriffes Richtungsbüschel folgt im § 46.

Hauptstrahl ist. Die Nachbarstrahlen von h in diesem Netze bestimmen also das isotrope Richtungsbüschel des Gewindes. Das Büschel $\mathfrak{P}$ dagegen liegt in einer zur Gewindeachse parallelen Ebene. Wollen wir also das Gewinde in die Figur 15 richtig hineinlegen, so müssen wir seine Achse in die Y-Achse legen, was übrigens auch aus den Zeigeränderungen am Anfang dieses Paragraphen folgt. Dadurch fallen von selbst sowohl in die X- als in die Z-Achse Mittelstrahlen; der letztere ist derjenige, von dessen Umgebung die Rede ist. Man sieht auch unmittelbar, daß für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ und $z = 0$ das P beliebig bleibt. Auch eine Vorzeichenprobe wollen wir mit (33) vornehmen: Für ein positives t ist einerseits $m > 0$, anderseits die Schraubung (Bd. I, § 1) rechts gewunden, das Gewinde (Bd. I, § 11) links gewunden, die elliptischen Netze in ihm, also auch das Rotationsnetz (Bd. I, Satz 115), rechts gewunden. Also müssen auch die Strahlen, die das isotrope Richtungsbüschel bestimmen, gegen h rechts gewunden sein, was in der Tat (§ 19) einem negativen P entspricht.

---

§ 42. Die berührenden linearen Komplexe.

Wir sagen, ein linearer Komplex **berühre** einen anderen Komplex C in einem Strahle s, wenn beide den Strahl s und die von s ausgehenden in ihnen enthaltenen Richtungen des Linienraumes gemein haben. Wenn C durch

$$F(p_1, \ldots p_6) = 0 \tag{1}$$

gegeben ist, so wird C nach § 35 vom linearen Komplex

$$\sum_1^6 F_i p_i = 0 \tag{7}$$

berührt, wenn in die F_i die Zeiger q des Strahles s eingesetzt werden. Wegen § 36, b) berühren im selben Strahl auch alle Komplexe, deren Zeiger durch

$$\Phi_i = F_i + M q_{i+3} \tag{13}$$

gegeben sind. Da hier M ein beliebiger Wert sein kann, folgt zunächst für die regulären Strahlen:

Satz 82: Die Gesamtheit der Strahlengewinde, die einen beliebigen Komplex in einem regulären Strahle s berühren, bilden ein Komplexbüschel, dessen Träger das parabolische Netz ist, das durch die Hauptkorrelation von s definiert ist.

Jedoch ist der singuläre Komplex dieses Büschels nach dem Wortlaute der Definition nicht zu den berührenden zu zählen. Ein berührendes Gewinde als Ganzes hat für C keine geometrische Bedeutung, sondern nur die Umgebung des Strahles s; in dieser Umgebung stimmen aber alle berührenden Gewinde untereinander überein, solange es sich nur um Eigenschaften erster Ordnung handelt. Trotzdem gibt es unter ihnen ein ausgezeichnetes, nämlich dasjenige G, dessen Achse s schneidet, für das also s ein Mittelstrahl ist. G ist der eine Hauptkomplex des Büschels (Bd. I, Satz 153) und nach den Eigenschaften des Zylindroids der einzige, dessen Achse auf s senkrecht steht, so daß wir ihn daraus bestimmen können: Nach Bd. I, Satz 88 sind die Richtungskosinus der Achse eines Gewindes den ersten drei Zeigern des Gewindes selbst proportional, wenn wir dessen Gleichung in der Form

$$\sum_1^6 a_{i+3}\, p_i = 0$$

schreiben. Vergleichen wir mit (7), so ist also

$$\sum_1^3 q_i\, F_{i+3} = 0 \tag{38}$$

die Bedingung dafür, daß die F_i die Zeiger des „Mittelgewindes“ G sind. Ist sie erfüllt, so wollen wir sagen, die Gleichung (1) sei die „Normalgleichung für den Strahl s“ oder die Gleichung des Komplexes sei „für den Strahl s in der Normalform geschrieben“*). Ist jene Bedingung nicht erfüllt, so kann man M aus

$$\sum_1^3 q_i\, F_{i+3} + M \sum_1^3 q_i^2 = 0 \tag{39}$$

*) Eine Verwechslung mit der Clebschschen Normalform ist eben wegen dieses Zusatzes „für den Strahl s“ nicht zu befürchten.

bestimmen und dann aus (13) die Zeiger des Mittelgewindes berechnen, auch die Normalform für einen beliebigen Strahl p finden, indem man diesen Wert M in (1a) (§ 36, b) einführt*):

$$\Phi = F\sum_1^3 p_i^2 - R\sum_1^3 p_i F_{i+3} = 0\,. \tag{40}$$

Da s für das Mittelgewinde ein Mittelstrahl ist, wird c in (32) Null und $m = \mathfrak{k}$; man kann also das Mittelgewinde dazu benützen, die Umgebungsgröße m von s zu berechnen. Zunächst ist nach Bd. I, Satz 88 der Parameter $\mathfrak{k}$ eines beliebigen Gewindes des Büschels:

$$\mathfrak{k} = \frac{\sum \Phi_i \Phi_{i+3}}{\sum_1^3 \Phi_{i+3}^2}.$$

Für einen Strahl des Mittelgewindes wird aus (40):

$$\Phi_i = F_i\sum_1^3 p_i^2 - p_{i+3}\sum_1^3 p_i F_{i+3}\,,$$

also:

$$m = \frac{\Sigma p_i^2 \cdot \Sigma F_i F_{i+3}}{\Sigma p_i^2 \cdot \Sigma F_{i+3}^2 - (\Sigma p_i F_{i+3})^2} \quad \text{(alle } \Sigma \text{ von 1 bis 3)}\,. \tag{41}$$

Hieraus folgt:

Satz 83: Ist (1) die Normalform für einen Strahl, so ist

$$\frac{F_1 F_4 + F_2 F_5 + F_3 F_6}{F_4^2 + F_5^2 + F_6^2}$$

die Umgebungsgröße dieses Strahles. Ein Komplex vom Grade n teilt sich nach dem Werte der Umgebungsgröße in ∞^1 Kongruenzen**) vom Grade $2n^2$.

*) Durch Weglassung des Nenners Σp^2 hat sich dabei der Grad der Komplexgleichung allerdings um zwei erhöht, ohne daß jedoch neue reelle Strahlen hinzugekommen wären. Für einen einzelnen Strahl q kann man ohne Erhöhung des Grades die Normalgleichung finden, indem man M aus (39) berechnet, dabei auch die absoluten Beträge der q fixiert und nun eine ganze homogene Funktion H der q bildet, die für dieselben absoluten Beträge den Wert M annimmt. Dann ist

$$F + HR = 0$$

die Normalform. Im Ergebnis kommt es auf die absoluten Beträge nicht mehr an.

**) Unter diesen ist die Singularitätenkongruenz ($m = 0$) die einzige, bei der sich der Grad auf $2n(n-1)$ erniedrigt.

Die Achse des Mittelgewindes eines Strahles s liegt in der asymptotischen Ebene von s und schneidet s im Zentralpunkt.

Für einen gewöhnlichen singulären Strahl folgt aus (13), daß

$$\Sigma \Phi_i \Phi_{i+3}$$

für alle Werte M verschwindet. Wegen der jetzigen Bedeutung der F_i wird nun durch (13) ein Strahlenbüschel dargestellt, also:

Satz 84: Die linearen Komplexe, die einen beliebigen Komplex in einem gewöhnlichen singulären Strahl s berühren, sind alle singulär; ihre Achsen bilden ein Strahlbüschel, dessen Scheitel der zugeordnete singuläre Punkt und dessen Ebene die zugeordnete singuläre Ebene von s sind.

Jedoch ist das Strahlengebüsch, dessen Träger s selbst ist, den berührenden nicht zuzuzählen. Wir können jetzt die Frage beantworten, was bei einem gewöhnlichen singulären Strahl s an Stelle der Umgebungsgleichung (33) tritt. Wählen wir unter den berührenden Strahlengebüschen dasjenige $\mathfrak{G}$, dessen Träger s senkrecht schneidet und machen diesen Träger zur Y-Achse eines rechtwinkligen Zeigersystems, dessen Z-Achse nach s fällt, so ist die Gleichung von $\mathfrak{G}$:

$$q_5 = 0$$

oder in natürlichen Zeigern nach § 18:

$$a = z \operatorname{tg}\omega \operatorname{tg}\alpha \,. \tag{42}$$

Hieraus

$$P = \lim \frac{a}{\omega} = z \operatorname{tg}\alpha \,. \tag{43}$$

Man erhält dieselbe Gleichung auch, wenn man in (33) $m = 0$ setzt, hätte sie aber doch nicht so ableiten können. Man kann sich also die ∞^2 Richtungen, die von einem singulären Strahl ausgehen, mittels derselben Kurven C versinnlichen, die wir auch beim regulären Strahl benützten. Auch hier trat ja im Büschel der Kurven C eine zerfallende auf (§ 41, zweite Anm.). Die regulären Strahlen unterscheiden sich untereinander und von den gewöhnlichen singulären nur dadurch, daß die Werte P den

einzelnen Kurven C anders zugeordnet sind; insbesondere entspricht bei den singulären Strahlen der zerfallenden Kurve der Wert $P = 0$.

§ 43. Komplexflächen.

Sei ein Komplex n-ten Grades C

$$F(p_1, \ldots p_6) = F(p) = 0 \tag{44}$$

gegeben. Dreht man eine Ebene E um eine feste Gerade g, so hat E in jeder Lage eine Komplexkurve und die Gesamtheit dieser Kurven bildet eine Fläche, die „Komplexfläche" der Geraden g. Jene Komplexkurven heißen Meridiankurven der Komplexfläche. Dieselben ∞^2 Komplexstrahlen, die g treffen, kann man noch in anderer Weise anordnen, indem man sie nach den Komplexkegeln der Punkte von g zusammenfaßt. Die Komplexfläche $\mathfrak{F}$ von g ist also auch das Umhüllungsgebilde dieser Kegel und in sich dual. Ihren Grad N (das ist sowohl ihre Ordnung als ihre Klasse) wollen wir bestimmen (Plücker, N. Geom. Art. 211, f):

Zunächst ergibt sich, daß g eine vielfache Linie von $\mathfrak{F}$ ist. Denn drehen wir E um g, so wird dabei die Meridiankurve einen bestimmten Punkt P auf g mehrmal, etwa m-mal durchschreiten. Zur Bestimmung von m betrachten wir den Komplexkegel von P. Jedesmal, wenn E diesen Kegel berührt, wird auch die Komplexkurve in E durch P gehen (Satz 76, angewendet auf den Berührungsstrahl). Nun hat der Komplexkegel als allgemeiner Kegel n-ter Ordnung die Klasse $n(n-1)$, also:

$$m = n(n-1).$$

Die m Berührungsebenen von g an den Kegel sind zugleich die Berührungsebenen an die m Schalen der Komplexfläche. Eine Ebene E schneidet $\mathfrak{F}$ außer in der m-fachen Linie g nur noch in der Meridiankurve von E. Diese hat als allgemeine Kurve n-ter Klasse die Ordnung $n(n-1)$, also:

$$N = m + n(n-1) = 2n(n-1).$$

Diese Betrachtungen gelten auch, wenn g ein Komplexstrahl ist; nur fallen dann stets zwei von den Berührungs-

ebenen aus g an den Komplexkegel zusammen, daher haben zwei von den m Schalen der Komplexfläche in jedem Punkte von g gemeinsame Berührungsebenen. Wenn wir durch irgend einen Punkt P auf g eine beliebige Ebene legen, so wird ihr Schnitt mit der Komplexfläche in P einen solchen m-fachen Punkt haben, für den zwei Tangenten zusammenfallen. Wenn dagegen g kein Komplexstrahl ist, sind alle m Tangenten im allgemeinen getrennt und können nur für besondere Lagen von P auf g zusammenrücken.

Satz 85: Die Komplexflächen eines Komplexes n-ten Grades haben sowohl die Ordnung als die Klasse $2n(n-1)$ und sind zu sich selbst dual. Die definierende Gerade einer solchen ist eine $n(n-1)$-fache Linie auf ihr.

Wenn g unendlich fern liegt, so heißt die Komplexfläche eine Äquatorialfläche und die Komplexkurven in den Ebenen der Stellung g heißen Breitenkurven (Plücker, a. a. O. Art. 163).

Um die Gleichung der Komplexfläche von g aufzustellen, wählen wir auf g zwei feste Punkte x und z. Dann ist (vgl. § 38)

$$(45)\qquad \begin{cases} F[(x_i+\lambda z_i)y_k-(x_k+\lambda z_k)y_i] \\ =F[(x_i y_k-x_k y_i)+\lambda(z_i y_k-z_k y_i)]=0 \end{cases}$$

die Gleichung des Komplexkegels eines Punktes $x+\lambda z \equiv F$ auf g in den laufenden Zeigern y. Der Inhalt der eckigen Klammer vertritt sechs Argumente. Setzen wir

$$x_i y_k - x_k y_i = p_{ik} = p_\nu\,, \quad z_i y_k - z_k y_i = q_{ik} = q_\nu\,,$$

so ist

$$(46)\qquad \begin{cases} F[p+\lambda q]=F(p)+\lambda\sum_1^6 \dfrac{\partial F}{\partial p_\nu}q_\nu \\ +\dfrac{\lambda^2}{2}\sum \dfrac{\partial^2 F}{\partial p_\nu\,\partial p_\mu}q_\nu q_\mu+\ldots=0 \end{cases}$$

die Gleichung desselben Komplexkegels; wir fassen sie aber jetzt anders auf: Wir denken uns einen Punkt y des Raumes gewählt und setzen seine Zeiger in die Größen p, q ein, wodurch alle Koeffizienten in (46) bekannt werden. Dann geben uns die n Wurzeln von (46) jene Werte λ, für die

der Komplexkegel des zugehörigen Punktes P durch y geht. Soll nun y auf der Komplexfläche von g liegen, so muß er auch auf der Grenzlage des Schnittes zweier benachbarter Komplexkegel liegen; also muß (46) eine Doppelwurzel λ haben. Wir werden also die Gleichung der Komplexfläche erhalten, indem wir die Diskriminante der Gleichung (46) Null setzen. Nun ist die Diskriminante einer Gleichung n-ten Grades in den Koeffizienten dieser Gleichung vom Grade $2n-2$, die Koeffizienten selbst sind aber hier in y vom Grade n. Also erhalten wir für die Komplexfläche wieder den Grad $2n(n-1)$.

---

§ 44. Komplexkurven.

Jede Kurve, deren sämtliche Tangenten einem gegebenen Komplex C angehören, heißt eine Kurve des Komplexes C oder eine Komplexkurve von C. Wenn zwei Kurven einen Punkt und in ihm die Tangente gemein haben, so sagt man, die Kurven haben daselbst ein Linienelement gemein. Wenn die Zeiger x, y, z eines Kurvenpunktes als Funktionen der Bogenlänge s gegeben sind, und die Striche Ableitungen nach s bedeuten, so sind nach § 4 die Zeiger der Tangente:

$$p_1 = x' \qquad p_4 = y z' - y' z$$
$$p_2 = y' \qquad p_5 = z x' - z' x$$
$$p_3 = z' \qquad p_6 = x y' - x' y .$$

Wenn also

$$F(p_1 \dots p_6) = 0$$

die Gleichung von C ist, so muß für die Kurven dieses Komplexes auch die Gleichung

$$F(x', y', z';\ y z' - y' z, \dots) = 0 \tag{47}$$

erfüllt sein. Differenzieren*) wir sie nach s, so folgt in abgekürzter Schreibweise:

$$\sum_1^3 x'' F_i + \sum_4^6 (y z'' - y'' z) F_i = 0 . \tag{48}$$

*) Wir folgen in diesem Paragraphen Demoulin (Comptes rendus, Bd. 124, 1897, S. 1077), dem die Sätze 87 und 88 angehören.

Hieraus kann man einen Satz von Lie („Over en Classe geometriske Transformationer", S. 77, Christiania, Vidensk. Selsk. Forh. 1871) ableiten:

Satz 86: Haben zwei Komplexkurven ein Linienelement gemein, so haben sie auch die Schmiegungsebene in ihm gemein, das ist nämlich die zu diesem Linienelement gehörige Berührungsebene des Komplexkegels.

Eine Ausnahme erleidet der Satz nur, wenn die gemeinsame Tangente ein singulärer Strahl des Komplexes und gleichzeitig ihr Berührungspunkt der zugehörige singuläre Punkt ist. Zum Beweise nehmen wir einen Punkt einer Komplexkurve $\mathfrak{C}$ als Ursprung und die Tangente als Z-Achse eines rechtwinkligen Systems. Dann wird

$$\begin{cases} x = y = z = x' = y' = 0 \\ z' = 1\,, \quad z'' = 0\,. \end{cases} \tag{49}$$

Die letzte Gleichung erkennt man aus der sphärischen Abbildung von $\mathfrak{C}$ oder aus

$$\Sigma x'^2 = 1\,, \quad \Sigma x' x'' = 0\,.$$

Also reduziert sich (48) auf

$$x'' F_1 + y'' F_2 = 0\,. \tag{50}$$

Um die Bedeutung der Größen F_1, F_2 zu erkennen, beachten wir, daß sich (47) für den Ursprung auf

$$F(x', y', z', 0, 0, 0) = 0 \tag{51}$$

reduziert. Diese Gleichung ist homogen in den Richtungszeigern $x' : y' : z'$ und stellt den Komplexkegel K des Ursprungs dar. Es werden also F_1, F_2, F_3 proportional den Richtungskosinus der Normalen n der Berührungsebene von K längs der Z-Achse, wenn man $p_3 = 1$, die übrigen p Null setzt. Dasselbe ergibt sich auch aus den Gleichungen (21) des § 38, wenn man dort von homogenen Zeigern zu rechtwinkligen übergeht. Daher ist

$$F_3 = 0\,. \tag{52}$$

Dagegen verschwinden F_1 und F_2 nur dann gleichzeitig, wenn die Z-Achse ein singulärer Strahl von K ist. Also folgt aus (50) der Satz 86 samt dem Ausnahmefall. Sehen

wir nun vom letzteren ab und verlegen die XZ-Ebene in die Schmiegungsebene. Dann wird für das betrachtete Linienelement

$$F_1 = 0\,, \quad y'' = 0\,. \tag{53}$$

Differenzieren wir die Gleichung (48) wieder nach s und berücksichtigen sofort (49), (52), (53), so folgt:

$$x'' F_1' + y''' F_2 + x'' F_5 = 0\,. \tag{54}$$

Die Differentiation entspricht einem Fortschreiten in der Richtung des Linienelementes. Dabei können x'', y'', z'', die auch in F_1' auftreten, noch auf verschiedene Art sich ändern. Man darf also F_1' in (54) nicht als konstant betrachten, muß vielmehr bilden:

$$\frac{dF_1}{ds} = \sum \frac{\partial F_1}{\partial p_i}\frac{dp_i}{ds} = \sum F_{1i}\frac{dp_i}{ds}\,.$$

Nun ist für unser Linienelement nur

$$\frac{dp_1}{ds} = x''$$

von Null verschieden, also:

$$F_1' = F_{11}\, x''\,.$$

Setzen wir dies in (54) ein und beachten, daß für unsere spezielle Lage des Zeigersystems die erste Krümmung $\varkappa$ von $\mathfrak{C}$ durch

$$\varkappa = x''\,,$$

die Torsion τ durch (Scheffers, Th. der Kurven, S. 181)

$$\tau = \frac{y'''}{x''}$$

gegeben ist*), so finden wir:

$$F_{11}\,\varkappa + F_2\,\tau + F_5 = 0\,, \tag{55}$$

worin alle Größen F konstant sind. D. h.:

Satz 87: Für alle Komplexkurven mit gemeinsamem Linienelement besteht eine lineare Beziehung zwischen den beiden Krümmungen im Punkte dieses Linienelementes.

*) Über die Weglassung des dortigen Minuszeichens vergleiche hier die Anmerkung auf S. 23 f.

Dieser Satz ist nicht zu verwechseln mit dem Satze von Bertrand über Kurven, deren Hauptnormalen zugleich Hauptnormalen einer zweiten Kurve sind. Denn der letztere Satz bezieht sich auf verschiedene Punkte einer und derselben Kurve (z. B. Bianchi-Lukat, § 19).

Für einen singulären Strahl des Komplexes wird

$$\sum_{1}^{3} F_i F_{i+3} = 0 .$$

Wegen (52) und (53) muß also, da F_2 (außer wenn der Ursprung singulärer Punkt ist) nicht Null ist, $F_5 = 0$ sein und es folgt:

Satz 88: Für Komplexkurven, deren gemeinsame Tangente ein singulärer Strahl des Komplexes ist, haben Torsion und erste Krümmung im gemeinsamen Berührungspunkt dasselbe Verhältnis.

Für ein Strahlengewinde folgt aus Satz 85, daß die Schmiegungsebene mit der Nullebene identisch ist, ferner aus (55): $\tau = \text{const}$. Aber hier ist die Gemeinsamkeit der Tangente nicht erforderlich, sondern es folgt aus Bd. I, Satz 118 unmittelbar ein Satz von Lie:

Satz 89: Alle Kurven eines Strahlengewindes, die durch denselben Punkt gehen, haben in ihm gleiche Torsion.

Der Betrag dieser Torsion ist (a. a. O.) Gleichung (105):

$$\tau = \frac{-\mathfrak{k}}{\mathfrak{k}^2 + \varrho^2}, \tag{56}$$

wobei ϱ der Abstand des Punktes von der Achse des Gewindes, $\mathfrak{k}$ der Parameter des letzteren ist. Hieraus folgt, da τ nicht Null werden kann, daß die Kurven eines Strahlengewindes keinen Undulationspunkt haben.

---

§ 45. Singuläre Komplexe.

Ein Komplex, dessen sämtliche Strahlen singulär sind, heißt selbst singulär. Wir wollen zeigen:

Satz 90: Ein singulärer Komplex besteht entweder aus den Tangenten einer Fläche oder aus den Treffgeraden einer Raumkurve.

Daß diese beiden Gebilde wirklich singuläre Komplexe sind, erkennt man daran, daß sich bei Verschiebung eines Punktes auf einem Komplexstrahl die Berührungsebene des zugehörigen Komplexkegels nicht ändert. Um zu zeigen, daß umgekehrt jene beiden Fälle alle Möglichkeiten erschöpfen, bedienen wir uns am bequemsten Kleinscher Zeiger, wenn auch der folgende Rechnungsgang mit gewöhnlichen Zeigern analog durchgeführt werden könnte. Wir bezeichnen die Kleinschen Zeiger mit x_i oder y_i und erinnern daran, daß auch in diesen Zeigern

$$y_i + \lambda y_i'$$

nach Bd. I, § 81 die Darstellung des Strahlenbüschels y, y' ist, wenn sich y, y' schneiden, wofür

$$\sum_1^6 y_i y_i' = 0 \tag{57}$$

die Bedingung ist. Wir setzen bei dieser Gelegenheit noch einige frühere Ergebnisse in die neuen Zeiger um: Es sei

$$F(x_1 \ldots x_6) = F(x) = 0 \tag{58}$$

eine homogene Gleichung n-ten Grades

$$\sum_1^6 x_i^2 = X = 0 \tag{59}$$

die Bedingung für die Linienzeiger. Dann können wir genau so wie in § 35

$$x_i = y_i + h y_i' + \ldots$$

in (58) einsetzen und erhalten

$$\Sigma F_i y_i' = 0 ,$$

d. i. dieselbe Bedingung für die Fortschreitungsrichtungen, die man aus

$$\Sigma F_i x_i = 0 \tag{60}$$

erhält, wenn man in die F_i die konstanten Werte y_i einsetzt. Es ist also auch hier (60) die Gleichung eines berührenden linearen Komplexes für den Strahl y. Da wir an Stelle von (58) die Gleichung

$$\Phi = F + M' X = 0 \tag{58a}$$

setzen können (vgl. § 36, b), so sind (61)

$$\Phi_i = F_i + M x_i \tag{61}$$

die Zeiger aller berührenden linearen Komplexe. Sie werden die eines speziellen Komplexes, wenn

$$\Sigma \Phi_i^2 = \Sigma F_i^2$$

verschwindet. Es ist also

$$\Psi = \Sigma F_i^2 = 0 \tag{62}$$

die Bedingung für einen singulären Strahl.

Wir setzen nun voraus, die Gleichung (62) sei für alle Strahlen des Komplexes (58) erfüllt, der letztere daher singulär. Die Form Ψ verschwindet also für alle Werte x, für die gleichzeitig die Formen F und X verschwinden. Daher läßt sich identisch darstellen*):

$$\Psi = \Sigma F_i^2 = A F + B X, \tag{63}$$

wobei A eine homogene Funktion vom Grade $n-2$, B vom Grade $2n-4$ ist.

---

*) Cayley, der dies zuerst behauptet (1860, Coll. Pap. Vol. IV, S. 447) scheint es für selbstverständlich zu halten. Nun folgt aus einem Satze von Hilbert (Math. Ann. Bd. 42), daß

$$\Psi^r = A F + B X$$

gesetzt werden kann, wobei r eine ganze positive Zahl ist. Nöther hat (zuerst für zwei Veränderliche durch seinen „Fundamentalsatz", dann für beliebig viele im 6. Bande der math. Ann., S. 358, f) die Bedingungen angegeben, unter denen $r=1$ angenommen werden darf. Dazu reicht sicher hin, daß die algebraischen Gebilde F und X unendlich viele reguläre Stellen gemein haben, die auch für Ψ regulär sind. Dies trifft nun in unserem Falle zu, da X überhaupt keine singulären Stellen hat und die singulären Stellen von F (wo alle partiellen Ableitungen verschwinden), wenn sie überhaupt vorhanden sind, eine niedrigere Mannigfaltigkeit bilden. Die singulären Stellen von $F=0$ als eines algebraischen Gebildes im Raum von fünf Dimensionen sind nämlich nicht zu verwechseln mit den singulären Strahlen des entsprechenden Komplexes F. Vielmehr bilden mindestens die den gewöhnlichen singulären Strahlen entsprechenden Zeiger eine reguläre Stelle des Gebildes $F=0$. Die gewöhnlichen singulären Strahlen von F sind aber im allgemeinen ebensolche von Ψ, da Ψ in den Komplex F und einen anderen F' vom Grade $n-2$ zerfällt. Nur die Strahlen der Schnittkongruenz von F und F' sind als Strahlen von Ψ singulär. Also durften wir den Nötherschen Satz anwenden.

Seien nun x_i die Zeiger eines Strahles von F. Dann sind für diese Werte x auch F_i die Zeiger einer Geraden und wir wollen zeigen, daß das ganze Büschel

$$x_i + \lambda F_i$$

dem Komplexe angehört (Klein, Math. Ann. V, S. 288). Wir bilden:

$$F(x_i + \lambda F_i) = F + \lambda \Sigma F_i^2 + \frac{\lambda^2}{2} \Sigma F_{ik} F_i F_k + \dots .$$

Die Glieder mit λ^0 und λ^1 verschwinden für den Strahl x; dasselbe kann man für die folgenden Koeffizienten zeigen: Wir differenzieren die Identität (63) nach x_k

$$2 \sum_{i=1}^{6} F_i F_{ik} = A F_k + A_k F + 2 B x_k + B_k X , \tag{64}$$

multiplizieren mit F_k, summieren von $k = 1$ bis 6, benützen neuerdings (63) und sehen, daß sich identisch darstellen läßt

$$\sum_{i,k} F_{ik} F_i F_k = A_2 F + B_2 X , \tag{65}$$

wobei auch A_2 und B_2 homogene Funktionen der x sind. Um das Verschwinden des nächsten Koeffizienten zu zeigen, differenzieren wir (65) und (64) nach x_l:

$$\Sigma F_{ikl} F_i F_k + 2 \Sigma F_{ik} F_{il} F_k = \dots , \tag{66}$$

$$2 \Sigma F_{ikl} F_i + 2 \Sigma F_{ik} F_{il} = \dots , \tag{67}$$

multiplizieren (66) mit F_l, (67) mit $F_k F_l$ und summieren entsprechend. Durch Subtraktion der so entstehenden Gleichungen sieht man:

$$\Sigma F_{ikl} F_i F_k F_l = A_3 F + B_3 X \tag{68}$$

usw. Nun ist der Schnittpunkt der Strahlen x_i und F_i der dem Strahl x zugeordnete singuläre Punkt (§ 39). Jeder solche Punkt ist aber Scheitel eines Büschels von Komplexstrahlen. Es kann also höchstens zweifach unendlich viele singuläre Punkte geben. Wenn es nur einfach unendlich viele gibt, so muß jeder der Scheitel von ∞^1 Büscheln also eines ganzen Strahlenbündels sein, das dem Komplex angehört und wir kommen auf den Fall der Treffgeraden einer Kurve. Wenn es zweifach unendlich viele singuläre Punkte gibt, so bilden diese eine Fläche, deren Tangenten den

Komplex F ausmachen. Denn nach Satz 78 muß jede ebene Komplexkurve ihre Tangenten in deren zugeordneten singulären Punkten berühren. Die Komplexkurve ist also ein ebener Schnitt der Fläche der singulären Punkte und der Komplex selbst die Tangentenmannigfaltigkeit dieser Fläche.

---

§ 46. Orthogonale Richtungen und ihre Abbildung.

Bevor wir die Differentialgeometrie der Komplexe weiterführen, müssen wir eine Untersuchung über die Richtungen im Linienraume einschalten: Die Linienzeiger p_i seien als Funktionen von vier Parametern $u_1, \ldots u_4$ gegeben. Wir betrachten die Umgebung eines bestimmten Strahles q_i, zunächst eine Regelfläche $\mathfrak{R}$ durch q (die Striche bedeuten Ableitungen nach t):

$$(69) \quad p_i = q_i + dt \cdot \sum_1^4 p_{i\lambda} u'_\lambda + \frac{dt^2}{2} \sum \frac{\partial^2 p_i}{\partial u_\lambda \partial u_\mu} u'_\lambda u'_\mu + \ldots .$$

Alle Regelflächen, für welche die Verhältnisse der u'_λ übereinstimmen, berühren sich längs q*); man kann also die vier Größen u' als homogene Zeiger der Richtungen auffassen, die von q ausgehen. Wir müssen die Mannigfaltigkeit dieser Richtungen etwas genauer untersuchen und legen zunächst hierzu eine spezielle Wahl der Parameter u zugrunde**): Wir legen nämlich in den Strahl q die Z-Achse eines rechtwinkligen Systems. In diesem habe der Nachbarstrahl p die Gleichungen:

$$x = v_1 z + v_2 , \quad y = v_3 z + v_4 .$$

Die Parameter v werden für q alle Null. Ein veränderlicher Strahl von $\mathfrak{R}$ hat also die Gleichungen:

$$(69\,a) \quad x = (v'_1 z + v'_2)\, dt + \ldots , \quad y = (v'_3 z + v'_4)\, dt + \ldots .$$

Die Ebene $y = nx$ schneidet ihn in einem Punkte, dessen $\zeta = \lim z$ für $p \equiv q$ durch

$$(70) \qquad v'_1 n \zeta - v'_3 \zeta + v'_2 n - v'_4 = 0$$

*) Dies folgt daraus, daß nach § 2 und 3 die Lage des Zentralpunktes, der Zentralebene und des Verteilungsparameters nur von den Ableitungen erster Ordnung der Linienzeiger abhängt.

**) Wir folgen in diesem Paragraphen Koenigs (Thèse, Paris, 1882).

bestimmt wird. Dies ist aber bis auf die Bezeichnung die Gleichung (14) des § 19. Sie stellt die Korrelation dar, die zur Richtung v'_λ gehört. Schreiben wir der Einfachheit halber

$$v'_\lambda = w_\lambda ,$$

um die Striche bei den w zur Bezeichnung einer zweiten Richtung zu verwenden, so können wir die Bedingung (17) in § 19 für die Involution zweier Korrelationen umschreiben:

$$w_1 w'_4 - w_2 w'_3 + w'_1 w_4 - w'_2 w_3 = 0 . \tag{71}$$

Wir können sie in Beziehung bringen zur Bedingung dafür, daß der Abstand p von q von höherer Ordnung verschwindet (zur Bedingung für die „schneidenden Richtungen"). Diese erhält man aus (69a), indem man $x = y = 0$ setzt:

$$M(w) = w_1 w_4 - w_2 w_3 = 0 . \tag{72}$$

Nun können wir (71) schreiben:

$$\sum_1^4 \frac{\partial M}{\partial w_i} w'_i = 0 \tag{73}$$

und haben die Involutionsbedingung durch die quadratische Differentialform*) M ausgedrückt. Wir können diesen Zusammenhang durch eine geometrische Abbildung anschaulich machen, indem wir die w als homogene Zeiger eines Punktes des dreidimensionalen Raumes deuten, also auch die Richtungen durch Punkte abbilden. Dann liegen die Bilder der schneidenden Richtungen auf der Fläche zweiter Ordnung $M = 0$, während (73) die Bedingung dafür ist, daß die Punkte w und w' konjugiert sind (daß jeder auf der Polarebene des anderen liegt).

Diese geometrische Darstellung hängt aber nicht an der speziellen Wahl der Parameter. Denn führen wir mittels

$$v_\lambda = \varphi_\lambda(u_1 \ldots u_4)$$

andere Parameter ein, so wird

$$v'_\lambda = \sum_{\mu=1}^4 \varphi_{\lambda\mu} u'_\mu , \qquad \varphi_{\lambda\mu} = \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial u_\mu} . \tag{74}$$

*) Multipliziert man M mit dt^2, so wird es in der Tat eine quadratische Form der Differentiale $v'_\lambda \cdot dt$. Wir erlauben uns aber auch schon M eine Differentialform zu nennen, analog wie man etwa in der Gruppentheorie den analytischen Ausdruck für den Krümmungshalbmesser eine Differentialinvariante nennt.

Da die $\varphi_{\lambda\mu}$ für q bestimmte konstante Werte haben, bedeutet (74) geometrisch eine lineare Zeigeränderung, wodurch die Gleichung der Fläche (72) in

$$N(u') = 0$$

übergeht, wobei auch N eine quadratische Form ist. Setzen wir analog wie früher $u'_\lambda = t_\lambda$ und bezeichnen mit t' eine zweite Richtung, so tritt

$$\sum_1^4 \frac{\partial N}{\partial t_\lambda} t'_\lambda = 0 \tag{75}$$

an Stelle von (73). Wir wollen wegen gewisser Analogien sagen, zwei Richtungen im Linienraum seien aufeinander senkrecht oder orthogonal, wenn die entsprechenden Korrelationen involutorisch sind (Bd. I, § 56). Dann haben wir den

Satz 91: Deutet man die homogenen Richtungszeiger für die Umgebung eines Strahles als homogene Punktzeiger im dreidimensionalen Raum, so werden die schneidenden Richtungen durch eine Fläche zweiter Ordnung, orthogonale Richtungen durch konjugierte Punkte abgebildet*).

Die Definition der orthogonalen Richtungen ist nicht unmittelbar anwendbar, wenn eine oder beide Richtungen schneidend sind, weil dann die Korrelation singulär wird, indem allen Punkten dieselbe (die „singuläre“) Ebene und allen Ebenen derselbe (der „singuläre“) Punkt zugeordnet ist. Wir können ohne weiteres die Gleichung (75) auch in diesem Fall als Definition der Orthogonalität nehmen, wollen aber, um die entsprechende geometrische Bedeutung zu erkennen, noch einen Augenblick auf die Korrelationen zurück-

*) Koenigs bevorzugt a. a. O. eine Art dualer Abbildung, um auch für den Winkelbegriff zweier Richtungen, auf den wir nicht näher eingehen, eine anschauliche Deutung zu haben. Es sei nur bemerkt, daß (gewisser Analogien wegen) Klein (Math. Ann. V, S. 269) den Winkel ϑ zweier Richtungen t, t' durch eine Formel definiert, die in unseren Bezeichnungen lauten würde:

$$\cos\vartheta = \frac{1}{2} \frac{\sum \frac{\partial N}{\partial t_\lambda} t'_\lambda}{\sqrt{N(t) \cdot N(t')}} .$$

In der Tat wird für senkrechte Richtungen $\cos\vartheta = 0$.

gehen. Hier nehmen wir (71) auch im Falle singulärer Korrelationen als Definition der Involution. Der Schnitt S und die Verbindungsebene E mit einem schneidenden Nachbarstrahl sind durch

$$(76) \qquad \zeta = -\frac{w_2}{w_1} = -\frac{w_4}{w_3}, \quad n = \frac{w_3}{w_1} = \frac{w_4}{w_2}$$

bestimmt. Drücken wir aus, daß eine beliebig gegebene Korrelation mit den Zeigern w' das Paar S, E enthält, so läßt sich (70) mit Hilfe von (76) genau in die Bedingung (71) verwandeln. Sind endlich beide Korrelationen singulär, so lassen sich ihre Gleichungen, wenn man

$$(77) \quad w_3 = \lambda w_1, \quad w_4 = \lambda w_2; \quad w_3' = \lambda' w_1', \quad w_4' = \lambda' w_2'$$

setzt, schreiben:

$$(w_1 \zeta + w_2)(n - \lambda) = 0, \quad (w_1' \zeta + w_2')(n - \lambda') = 0.$$

Anderseits geht die Involutionsbedingung durch (77) über in

$$(w_1 w_2' - w_2 w_1')(\lambda' - \lambda) = 0,$$

wird also entweder durch $\lambda' = \lambda$, d. h. nach (77) und (76 durch $n = n'$ oder durch $\zeta' = \zeta$ erfüllt. D. h.:

Satz 92: Ist von zwei involutorischen Korrelationen einer Geraden die eine singulär, so bilden ihr singulärer Punkt und ihre singuläre Ebene ein Paar der anderen; sind beide singulär, so haben sie entweder ihren singulären Punkt oder ihre singuläre Ebene gemein.

Die Gesamtheit der Richtungen, die durch eine Gerade abgebildet werden, nennen wir ein Richtungsbüschel, die ∞^2 durch eine Ebene abbildbaren ein Richtungsbündel. Vermöge der bekannten Eigenschaften des Polarsystems einer Fläche zweiter Ordnung lassen sich aus dem Satze 91 sogleich Folgerungen ziehen. Betrachtet man z. B. einen Punkt und seine zugehörige Polarebene, dann zwei konjugierte Polaren, so erhält man:

Satz 93: Alle Richtungen eines Bündels sind zu einer festen Richtung senkrecht. Zu jedem Richtungsbüschel gibt es ein anderes, so daß je eine beliebige Richtung des einen und des anderen orthogonal sind.

Da (72) eine Regelfläche ist, was bei reellen Transformationen erhalten bleibt, so sind bei reeller Parameter-

wahl in jedem Richtungsbündel schneidende Richtungen enthalten, die durch einen Kegelschnitt abgebildet werden. Die Art, wie die Linienzeiger von den u abhängen, hat bisher gar keine Rolle gespielt. Dies kommt erst zur Geltung, wenn man die Form N berechnen will. Um sie z. B. für homogene Zeiger zu finden, braucht man nur in die Schnittbedingung (§ 3 und 4)

$$\sum_1^3 p'_\nu p'_{\nu+3} = 0$$

die aus der gegebenen Abhängigkeit

$$p_i = f_i(u_1 \dots u_4)$$

folgenden Werte

$$p'_i = \sum_{\lambda=1}^{4} f_{i\lambda} u'_\lambda , \qquad f_{i\lambda} = \frac{\partial f_i}{\partial u_\lambda} \tag{78}$$

einzuführen. Man findet:

$$N(u') = \sum_{\lambda,\mu=1}^{4} A_{\lambda\mu} u'_\lambda u'_\mu , \qquad 2A_{\lambda\mu} = 2A_{\mu\lambda} = \sum_{i=1}^{6} f_{i\lambda} f_{i+3,\mu} . \tag{79}$$

Betrachten wir zwei Richtungen u'_λ und v'_μ, denen die Zeigerableitungen p'_i und r'_k entsprechen mögen, so daß für alle Regelflächen der ersten Richtung die Zeigerentwicklungen mit

$$p_i = q_i + dt \cdot p'_i + \dots ,$$

für die der zweiten Richtung mit

$$r_i = q_i + dt \cdot r'_i + \dots \qquad (i = 1, \dots 6)$$

beginnen. Dann ist

$$\sum_1^6 p'_i r'_{i+3} = 0 \tag{80}$$

die Bedingung für die Orthogonalität der Richtungen. Denn führt man hierin durch (78) die u' und v' ein, so stößt man auf

$$\sum_1^4 A_{\lambda\mu} u'_\lambda v'_\mu = 0 , \tag{81}$$

wie es der Regel des Satzes (91) entspricht.

Durch einen Punkt P der Fläche $N = 0$ wird eine singuläre Korrelation S abgebildet. Die Polarebene von P

ist die Berührungsebene β von N. Alle Korrelationen, deren Bilder in β liegen, sind zu S involutorisch. Unter diesen gibt es zwei Büschel singulärer, da N von β in zwei Erzeugenden geschnitten wird. Da aber zwei singuläre Korrelationen S, S' entweder den singulären Punkt oder die singuläre Ebene gemein haben, so können wir in beiden Fällen die Verbindungslinie der beiden Bilder als Bild des singulären Elementes betrachten. Bewegen wir die Bilder von S, S' so, daß ihre Verbindungslinie stets Erzeugende von N bleibt, so müssen sich auch die singulären Korrelationen stetig so ändern, daß sie stets ein singuläres Element gemein haben. Dieses muß also, wenn es anfangs ein Punkt war, immer ein Punkt sein. D. h. wir können durch die eine Regelschar der Fläche N die Punkte, durch die andere die Ebenen abbilden, die mit dem Ausgangsstrahl q inzident sind.

---

§ 47. Die Fortschreitungsrichtungen in einem Komplex.

Satz 94: Die in einem Komplex in der Umgebung eines regulären oder gewöhnlichen singulären Strahles vertretenen Richtungen bilden ein Richtungsbündel.

Man kann sich auf verschiedene Art davon überzeugen: Z. B. kann der Komplex durch eine Beziehung zwischen bloß vier Linienzeigern gegeben sein:

$$f(u_1, \ldots u_4) = 0 . \tag{82}$$

Dann sind die Richtungszeiger durch die lineare Beziehung

$$\sum_1^4 f_\lambda u'_\lambda = 0 \tag{83}$$

beschränkt. Wenn jedoch eine Gleichung in homogenen Linienzeigern gegeben ist

$$F(p_1, \ldots p_6) = 0 , \tag{84}$$

so denken wir uns vermöge

$$p_i = \varphi_i(u_1 \ldots u_4)$$

vier unabhängige Parameter eingeführt und finden

$$\sum_1^4 u'_\lambda \sum_{i=1}^6 F_i \varphi_{i\lambda} = 0 , \tag{85}$$

also wieder eine lineare Beziehung zwischen den u'. Zum Richtungsbündel gehört nach dem vorigen Paragraphen eine abbildende Ebene E. Ihr Schnitt mit der Fläche $N = 0$ ist ein Kegelschnitt $\mathfrak{Z}$, der die im Komplex vertretenen schneidenden Richtungen abbildet. Auch für die Darstellung*)

$$p_i = f_i(u_1, u_2, u_3) \qquad (i = 1, \ldots 6) \tag{86}$$

eines Komplexes finden wir $\mathfrak{Z}$ durch eine analoge Rechnung wie am Schluß des vorigen Paragraphen; nur gehen jetzt die Summen nach λ, μ von eins bis drei, und zwar tritt hier $\mathfrak{Z}$ ohne Beziehung auf eine Fläche N auf, weil nicht gesagt ist, wie die im Komplex nicht vorkommenden Geraden durch einen vierten Parameter bestimmt werden sollen, was noch auf sehr verschiedene Weise geschehen könnte.

Satz 95: Die Hauptkorrelation eines Komplexstrahles ist zu den Korrelationen aller im Komplex vertretenen Richtungen involutorisch.

Nach Satz 93 gibt es nämlich eine Richtung R, die zu allen Richtungen des Komplexes, also auch zu den schneidenden senkrecht ist. Nach Satz 92 muß die zugehörige Korrelation alle Punkt-Ebenen-Paare enthalten, die den schneidenden Richtungen zugeordnet sind. Es ist leicht

*) Wir nennen diese Darstellung „Parameterdarstellung" eines Komplexes, während (84) „homogene" Darstellung heißen möge. Die erstere ist allgemeiner, weil sie auch transzendente Komplexe umfaßt und weil durch sie die Komplexe nicht nur als Liniengebilde, sondern als Stabgebilde, die mit mehr Eigenschaften begabt sind, dargestellt werden. Um von (86) zu (84) überzugehen, könnte man wegen der Identität zwischen den Stabzeigern eine der Gleichungen (86) außer Acht lassen, aus drei anderen die u berechnen und in die zwei letzten einsetzen, wodurch im allgemeinen zwei nicht homogene Gleichungen zwischen den p entstehen, aus denen man nach Bd. I, Satz 71 die homogene Darstellung abzuleiten hat. Allgemeiner kann man sagen, man hat zunächst auf zweifache Art die u aus (86) zu eliminieren, usw. Will man umgekehrt von (84) zu (86) übergehen, so denke man sich zunächst vermöge der Identität eines der p z. B. p_5 aus (84) entfernt, wobei die Gleichung homogen bleibt, dann nach einem Zeigerverhältnis, etwa $p_6 : p_3$ aufgelöst. Setzt man $p_3 = 1$ und wählt die übrigen p_1, p_2, p_4 als Parameter, so hat man eine Darstellung von der Form (86).

Es ist selbstverständlich, daß mit jeder Parameterdarstellung eine Abbildung des Komplexes auf den Punktraum gegeben ist und daß man aus einer solchen unbegrenzt viele erhalten kann (Bd. I, § 60, Schluß).

zu sehen, wie sich dieses Ergebnis für die gewöhnlichen singulären Strahlen abändert. Hier ist durch den zugeordneten singulären Punkt S und die singuläre Ebene σ eine singuläre Korrelation definiert und das Paar S, σ gehört nach Gleichung (43) auch den Korrelationen aller anderen Nachbarstrahlen an. Wenn wir also hier diese singuläre Korrelation Hauptkorrelation nennen, können wir den Satz 95 aufrecht erhalten. Da die Richtung, die sie vertritt, dem Komplex selbst angehört, so tritt hier Berührung zwischen N und E ein und $\mathfrak{Z}$ zerfällt in ein Geradenpaar, das bei reeller Parameterwahl stets reell ist. In der Tat bildet die eine Gerade des Paares die Nachbarstrahlen ab, die durch S gehen, die andere diejenigen, die in σ liegen. Hieraus kann man die zur Darstellung (86) gehörige Gleichung der Singularitätenkongruenz in den Parametern u_1, u_2, u_3 entnehmen; man braucht bloß die Determinante von $\mathfrak{Z}$ Null zu setzen:

$$(87)\qquad \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = 0\,, \qquad A_{\lambda\mu} = A_{\mu\lambda} = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{6} f_{i\lambda} f_{i+3,\mu}\,.$$

Wir wollen die Zeiger $r_1, \ldots r_4$ der Richtung R berechnen (die also im Falle eines regulären Strahles dem Komplex nicht angehört): Nach Satz 95 muß zunächst für die Darstellung (82), wenn man in der Orthogonalitätsbedingung (75)

$$\sum_{1}^{4} \frac{\partial N}{\partial t_\lambda} u'_\lambda = 0$$

die r für die t einsetzt, diese Gleichung mit (83) identisch werden. Die r bestimmen sich also, wenn man die Form N, die bekannt sein muß, mit den Argumenten r schreibt, aus den linearen Gleichungen

$$(88)\qquad \frac{\partial N}{\partial r_\lambda} = \varrho f_\lambda \qquad (\lambda = 1, \ldots 4)\,,$$

wobei ϱ eine willkürliche Größe ist und die f_λ nach Wahl des Strahles bekannt sind. Analog folgt für die Darstellung (84) die Bedingung

$$\sum_{1}^{6} F_i p'_i = 0$$

für die Richtungen. Durch Vergleich mit (80) findet man

$$r_i = \varrho F_{i+3}\,, \tag{89}$$

womit eine geometrische Deutung der partiellen Ableitungen der linken Seite der Komplexgleichung (84) gewonnen ist. Endlich hat man für die Darstellung (86) zunächst aus (80) und (86) die Bedingungen

$$\sum_{i=1}^{6} r_{i+3} f_{i\lambda} = 0\,, \qquad \lambda = 1, 2, 3\,. \tag{90}$$

Dann hat man aufzuschreiben, daß r eine von p ausgehende Richtung ist, indem man die Gleichung $\Sigma p_i p_{i+3} = 0$ differenziert und einsetzt:

$$\Sigma r_{i+3} f_i = 0\,.$$

Eine weitere Bedingung ergibt sich nicht. In der Tat sind selbst die Verhältnisse der r nach § 36, a) noch nicht völlig bestimmt.

Eine im Komplex C enthaltene Kongruenz $\mathfrak{C}$ denken wir uns durch einen anderen Komplex herausgeschnitten. Es tritt also für die Richtungen von $\mathfrak{C}$ eine zweite lineare Beziehung hinzu und die Abbildung dieser Richtungen erfolgt durch eine Gerade der Ebene E.

Satz 96: Die in einer Kongruenz vertretenen Richtungen bilden ein Richtungsbüschel. Für alle Kongruenzen eines Komplexes gibt es in der Umgebung jedes regulären oder gewöhnlichen singulären Komplexstrahles, der in den Kongruenzen regulär ist, nur ∞^2 Richtungsbüschel, die durch zwei ihrer Richtungen bestimmt sind.

Wählt man z. B. zwei schneidende Richtungen im Komplex aus, so sind dadurch die gemeinsamen Brennpunkte und Brennebenen, daher nach Abschnitt II auch alle übrigen Richtungen aller Kongruenzen bestimmt, welche die zwei gewählten Richtungen enthalten. Da die in § 41 als „isotropes Richtungsbüschel" bezeichneten Richtungen tatsächlich in Kongruenzen auftreten (nämlich in jedem isotropen Strahl), so ist damit jener Name gerechtfertigt. Analog treten die komplementären Büschel bei zylindrischen Strahlen einer Kongruenz auf, also auch bei jedem Strahl einer zylindrischen Kongruenz. Da man aber in einer solchen auch in der Zylinderfläche des betrachteten Strahles

selbst fortschreiten kann, so ist die „zylindrische" Richtung des § 41 dem komplementären Büschel zuzuzählen, obgleich ihr Repräsentant nicht dem dortigen Parallelbüschel $\mathfrak{P}$ angehört. Dieses vermittelt den Übergang zu allen Strahlen einer benachbarten Zylinderfläche.

Sei g die Gerade, welche die Richtungen einer Kongruenz $\mathfrak{C}$ abbildet, die in C enthalten ist. Je nachdem $\mathfrak{Z}$ von g geschnitten, berührt oder nicht geschnitten wird, ist der betrachtete Komplexstrahl in $\mathfrak{C}$ ein hyperbolischer, parabolischer oder elliptischer Strahl (§ 23). Die drei Richtungen, längs deren sich einer der drei Parameter allein ändert, nennen wir Parameterrichtungen und zwar gibt es eine „u-Richtung" usw. Sie werden durch die Eckpunkte des Grunddreiecks des Zeigersystems in E abgebildet. Durch Betrachtung eines Polardreiecks von $\mathfrak{Z}$ ergibt sich:

Satz 97: In der Umgebung jedes regulären Komplexstrahles lassen sich auf ∞^3 Arten drei zueinander senkrechte Richtungen auswählen. Alle Richtungen jeder Kongruenz, die zwei von diesen dreien enthält, sind zur dritten senkrecht.

Wählt man ein solches Polardreieck als Grunddreieck, so nimmt die Gleichung von $\mathfrak{Z}$ die Form an:

$$A_{11}u'^2 + A_{22}v'^2 + A_{33}w'^2 = 0\,. \tag{91}$$

Damit ist nicht bewiesen, daß sich die Parameter so wählen lassen, daß $\mathfrak{Z}$ für alle Strahlen zugleich diese Form annimmt. Wenn es der Fall ist, wollen wir sie orthogonale Parameter nennen und man hätte ein Analogon der dreifach orthogonalen Flächensysteme vor sich, die immer ein dreifach orthogonales Kurvensystem mit sich bringen. Man hätte nämlich den Komplex derart in drei Systeme von ∞^2 Regelflächen zerlegt [die u-Flächen*) usw. Bd. I, § 60], daß in jedem Komplexstrahl die drei durchgehenden Regelflächen („Parameterflächen") gegenseitig involutorische Korrelationen bestimmen. Die drei Scharen von ∞^1 Kongruenzen $u = \text{const.}$ usw. (die „Parameterkongruenzen") wären den Flächen des orthogonalen Systems analog. Wir werden in § 50, b) diese Frage nochmals streifen und bemerken jetzt nur, daß die Aufgabe, durch eine Substitution

*) Wir schreiben nach Bequemlichkeit auch u, v, w statt u_1, u_2, u_3.

$$u = \varphi_1(u_1, v_1, w_1)$$
$$v = \varphi_2(u_1, v_1, w_1)$$
$$w = \varphi_3(u_1, v_1, w_1)$$

orthogonale Parameter herzustellen, auf folgendes System von simultanen partiellen Differentialgleichungen führt:

$$\Sigma A_{ik}\varphi_{i1}\varphi_{k2} = 0\,, \quad \Sigma A_{ik}\varphi_{i2}\varphi_{k3} = 0\,, \quad \Sigma A_{ik}\varphi_{i3}\varphi_{k1} = 0\,.$$

Denn dies sind die Koeffizienten der neuen Produkte $u_1' v_1'$ usw. Es wäre jedoch schwierig, dieses System allgemein zu diskutieren; führt doch schon das analoge einfachere Problem für den Punktraum auf eine umfangreiche Theorie (Darboux, Leçons sur les Syst. Orthog., Paris, 1898).

Für den ganzen Linienraum, für den das analoge Problem einfacher ist, hat Koenigs (Thèse, S. 74) ein Beispiel eines Orthogonalsystems angegeben, d. h. er hat die Gerade durch vier Zeiger derart (allerdings nicht reell) bestimmt, daß die quadratische Form (79) nur die vier Quadrate enthält*).

Wir haben in der Theorie der Kongruenzen gesehen, daß uns der Wert des Verteilungsparameters P als Funktion der Richtung (§ 22) sehr nützlich war; analog wollen wir ihn auch hier (für die Darstellung 86) berechnen. Wir setzen:

$$u' = \mathfrak{u}\,, \quad v' = \mathfrak{v}\,, \quad w' = \mathfrak{w}\,,$$

so daß $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ homogene Richtungszeiger innerhalb des Komplexes C und zugleich homogene Punktzeiger in der abbildenden Ebene E des betrachteten Strahles sind. Dann finden wir analog wie in § 22:

$$(92)\quad P = \frac{A_{11}\mathfrak{u}^2 + A_{22}\mathfrak{v}^2 + A_{33}\mathfrak{w}^2 + 2A_{23}\mathfrak{v}\mathfrak{w} + 2A_{31}\mathfrak{w}\mathfrak{u} + 2A_{12}\mathfrak{u}\mathfrak{v}}{N_{11}\mathfrak{u}^2 + N_{22}\mathfrak{v}^2 + N_{33}\mathfrak{w}^2 + 2N_{23}\mathfrak{v}\mathfrak{w} + 2N_{31}\mathfrak{w}\mathfrak{u} + 2N_{12}\mathfrak{u}\mathfrak{v}} p^2\,.$$

wobei $p^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$ und**)

$$(93)\quad \begin{cases} A_{11} = \sum_1^3 p_{\lambda u} p_{\lambda+3,u} & A_{12} = \frac{1}{2}\sum_1^6 p_{\lambda u} p_{\lambda+3,v} \\ A_{22} = \Sigma p_{\lambda v} p_{\lambda+3,v} & A_{23} = \frac{1}{2}\Sigma p_{\lambda v} p_{\lambda+3,w} \\ A_{33} = \Sigma p_{\lambda w} p_{\lambda+3,w} & A_{31} = \frac{1}{2}\Sigma p_{\lambda w} p_{\lambda+3,u} \end{cases}$$

*) Vgl. § 54, zweite Anm.; auch Klein, Math. Ann. V, S. 272 f.

**) Wenn man nach Bd. I, § 81 Kleinsche Zeiger einführt, so werden die Größen A einfacher, z. B. $A_{11} = \Sigma p_{\lambda u}^2$, $A_{12} = \Sigma p_{\lambda u} p_{\lambda v}$, dagegen die Größen N, die jetzt nur von drei Zeigern abhängen, verwickelter.

$$(94)\quad \begin{cases} N_{11} = \Sigma (p_2 p_{3u} - p_3 p_{2u})^2 , \\ N_{22} = \Sigma (p_2 p_{3v} - p_3 p_{2v})^2 , \\ N_{33} = \Sigma (p_2 p_{3w} - p_3 p_{2w})^2 , \\ N_{12} = \Sigma (p_2 p_{3u} - p_3 p_{2u})(p_2 p_{3v} - p_3 p_{2v}) \\ N_{23} = \Sigma (p_2 p_{3v} - p_3 p_{2v})(p_2 p_{3w} - p_3 p_{2w}) \\ N_{31} = \Sigma (p_2 p_{3w} - p_3 p_{2w})(p_2 p_{3u} - p_3 p_{2u}) \end{cases}$$

In (94) enthalten alle Summen drei Glieder; aus dem angeschriebenen gehen die zwei anderen durch zyklische Vertauschung der Marken 1, 2, 3 hervor. Wir schreiben (92) auch in der Form:

$$(92a)\quad P = p^2 \cdot \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{N}} ,$$

wollen aber außerdem

$$(95)\quad \sum_1^3 p_i^2 = p^2 = 1 , \quad \text{also} \quad \sum_1^3 p_\mu p'_\mu = 0$$

voraussetzen, was durch einen normalmachenden Faktor (Bd. I, § 33) erreicht wird.

Da für die schneidenden Richtungen $P = 0$ wird, so ist $\mathfrak{Z} = 0$ zugleich die Gleichung von $\mathfrak{Z}$, wie auch aus dem Bau der Koeffizienten und Vergleich mit (87) hervorgeht. Alle Richtungen eines bestimmten Wertes P werden durch den Kegelschnitt

$$(96)\quad P\mathfrak{N} - p^2 \mathfrak{Z} = 0$$

abgebildet; also:

Satz 98: In der Umgebung jedes regulären Komplexstrahles entspricht jedem Werte P in der Ebene E ein Kegelschnitt eines bestimmten Büschels $\mathfrak{B}$.

Es empfiehlt sich, den Nenner $\mathfrak{N}$ noch in einer anderen Form bereit zu halten: Er ist aus

$$(97)\quad \Sigma (p_2 q_3 - p_3 q_2)^2 = \sum_1^3 p_\mu^2 \cdot \sum_1^3 q_\mu^2 - \left(\sum_1^3 p_\mu q_\mu \right)^2$$

(Bd. I, § 37) entstanden, wobei

$$q_\mu = p_\mu + dp_\mu + \tfrac{1}{2} d^2 p_\mu + \dots$$

in die linke Seite der Identität eingesetzt wurde. Benützen wir statt dessen die rechte Seite, so gelangen wir zum Nenner

$$p^2 \sum_1^3 p_\mu'^2 - \left(\sum_1^3 p_\mu p_\mu' \right)^2$$

oder wegen (95): $\Sigma p_\mu'^2$.

Dieser Ausdruck ist sowohl für Kongruenzen als Komplexe verwendbar; im ersten Falle wäre zu setzen:

$$p_\mu = p_{\mu u}\,\mathfrak{u} + p_{\mu v}\,\mathfrak{v}\,,$$

im zweiten:

$$p_\mu = p_{\mu u}\,\mathfrak{u} + p_{\mu v}\,\mathfrak{v} + p_{\mu w}\,\mathfrak{w}\,.$$

Dann gelangen wir zu

$$P = \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{M}}\,, \tag{92b}$$

wobei $\mathfrak{M}$ aus $\mathfrak{N}$ hervorgeht, indem die Größen ($\lambda = 1, 2, 3$)

$$\left\{ \begin{array}{ll} M_{11} = \Sigma p_{\lambda u}^2 & M_{12} = M_{21} = \Sigma p_{\lambda u} p_{\lambda v} \\ M_{22} = \Sigma p_{\lambda v}^2 & M_{23} = M_{32} = \Sigma p_{\lambda v} p_{\lambda w} \\ M_{33} = \Sigma p_{\lambda w}^2 & M_{31} = M_{13} = \Sigma p_{\lambda u} p_{\lambda w} \end{array} \right. \tag{94a}$$

an Stelle der N_{ik} gesetzt werden, aus denen sie vermöge (95) durch Spezialisierung hervorgehen. Das Kegelschnittsbüschel ist jetzt gegeben durch

$$P\mathfrak{M} - \mathfrak{Z} = 0 \tag{98}$$

und durch Differentiation von (95) nach u, v, w erhält man drei Gleichungen, aus denen folgt:

$$\Delta = \begin{vmatrix} p_{1u} & p_{1v} & p_{1w} \\ p_{2u} & p_{2v} & p_{2w} \\ p_{3u} & p_{3v} & p_{3w} \end{vmatrix} = 0\,. \tag{99}$$

---

§ 48. Ausgezeichnete Richtungen im Komplex.

Die Ergebnisse dieses Paragraphen stammen wesentlich aus der Diskussion des Kegelschnittsbüschels (98), wobei $\mathfrak{Z}$ der Zähler von (92) ist. Wir setzen einen regulären Komplexstrahl voraus:

a) Der Verteilungsparameter P wird nur für eine einzige, die zylindrische Richtung (§ 41), unendlich; also kann $\mathfrak{N}$ oder $\mathfrak{M}$ (92a und 92b) nur für ein einziges reelles Wertsystem $\mathfrak{u} : \mathfrak{v} : \mathfrak{w}$ verschwinden, was nur möglich ist, wenn es in ein imaginäres Geradenpaar j, j_1 zerfällt. Der Schnittpunkt T dieses Paares liegt auch auf $\mathfrak{Z}$, weil die zylindrische Richtung den schneidenden angehört. Das Kegelschnittsbüschel hat also die Besonderheit, daß der Mittelpunkt T des zerfallenden $\mathfrak{N}$ von den beiden definierenden Kegel-

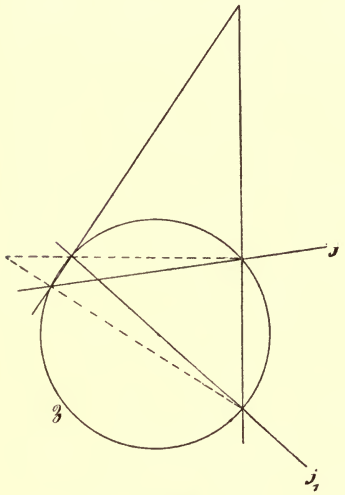

Fig. 16.

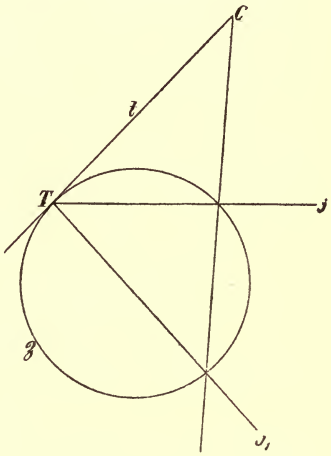

Fig. 17.

schnitten auf dem nicht zerfallenden liegt. Läßt man diesen Fall (Fig. 17) als Grenzfall aus dem allgemeinen Falle (Fig. 16) entstehen, wobei wir uns nach Bd. I, § 66,e) reelle Skizzen machen dürfen, so sieht man, daß das Paar j, j_1 doppelt zu zählen ist und daß sich alle Kegelschnitte des Büschels in T berühren (vgl. auch Clebsch-Lindemann, I, S. 136). Dieses enthält also außerdem nur noch ein einziges (und zwar reelles) Geradenpaar t, i. Die eine Gerade t berührt $\mathfrak{Z}$ in T, die andere i liegt außerhalb $\mathfrak{Z}$ (Fig. 18), weil eben j, j_1 imaginär sind. Dieses Paar kann nur dem Werte

$$P_i = -m \tag{100}$$

entsprechen, weil dies nach § 41 der einzige Wert P ist, für den die Mannigfaltigkeit der zugehörigen Richtungen in zwei getrennte Büschel zerfällt. Es muß also, weil auf i keine schneidende Richtung liegt, i das isotrope, t das komplementäre Richtungsbüschel abbilden, das in der Tat die zylindrische Richtung T als einzige schneidende enthält. Weil das erstere Büschel durch das letztere zu einer vollen Linie zweiter Ordnung ergänzt wird, ist der Name „komplementär" gerechtfertigt.

b) Durch den Schnittpunkt C dieser beiden Büschel und die durchgehende Seite i ist ein ausgezeichnetes Polar-

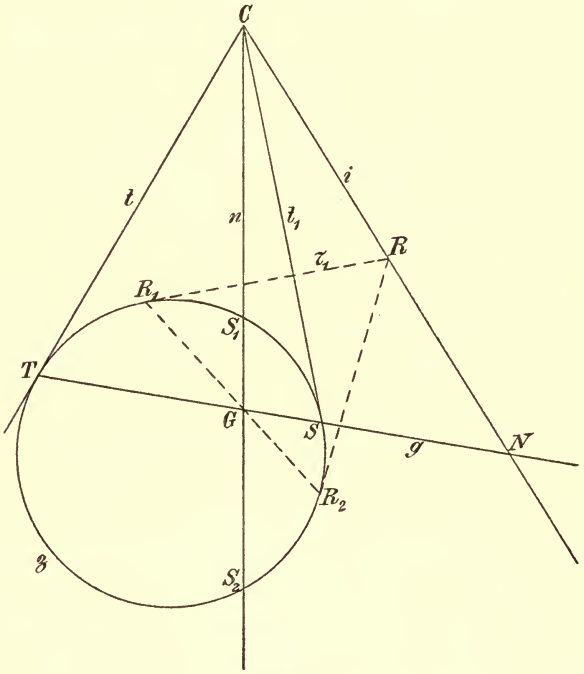

Fig. 18.

dreieck CNG von $\mathfrak{Z}$ (Fig. 18) in eindeutiger Weise bestimmt. Ausgezeichnete Punkte der Figur sind noch: Der zweite Schnittpunkt S von $GN \equiv g$ mit $\mathfrak{Z}$, die Schnitte S_1 und S_2 von $CG \equiv n$ mit $\mathfrak{Z}$. Die Tangente t_1 in S an $\mathfrak{Z}$ geht

durch C. Es ist jetzt zu ermitteln, was diese ausgezeichneten Punkte und Linien geometrisch für den Komplex bedeuten. Wir bezeichnen die Richtungen mit denselben Buchstaben, wie ihre Bilder in E (in Fig. 18) und ihre Repräsentanten in Fig. 19. Da C die dem komplementären und isotropen Büschel gemeinsame Richtung ist, so muß sie nach § 41 bei der dortigen Lage des Zeigersystems die natürlichen Zeiger

$$\text{(C)} \qquad \alpha = 0, \quad z = 0, \quad P = -m$$

haben. Wir nennen sie die „isotrope Zentralrichtung", weil Zentralpunkt und Zentralebene der zugehörigen Regelflächen mit Zentralpunkt und Zentralebene (XZ-Ebene) des betrachteten Komplexstrahles selbst (d. i. seiner Hauptkorrelation) zusammenfallen. Die zugehörige repräsentierende Gerade C berührt (Fig. 19*) den Zylinder des § 41 in X. Ferner ist N, weil auf i gelegen auch eine isotrope Richtung und zwar diejenige, die auf C senkrecht steht (Satz 91). Nun besteht für die Zeiger α, z, P; α', z', P' zweier orthogonalen Richtungen nach § 19 die Beziehung

$$\text{(101)} \qquad (z - z')(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha') = (P + P')(1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha').$$

Wenn $z = z'$, so ist also entweder $P = -P'$ oder $\alpha' = \alpha + \frac{\pi}{2}$, wobei im ersten Falle α und α', im zweiten P und P' beliebig bleiben.

Satz 99: Haben zwei Korrelationen derselben Geraden einen gemeinsamen Zentralpunkt, so sind sie dann und nur dann involutorisch, wenn ihre Parameter gegengleich sind oder wenn ihre Zentralebenen aufeinander senkrecht stehen.

Da aber für die beiden Richtungen C und N

$$P = P' = P_i$$

ist, so muß der zweite Fall eintreten, d. h. N erhält man in Fig. 19, wenn man C auf dem Hyperboloid des isotropen Büschels um einen rechten Winkel dreht. Die „isotrope

*) Die Fig. 19 kann man sich über Fig. 15 gelegt denken; sie ist für ein positives m entworfen; MX und MY gehen nach vorn abwärts.

Nebenrichtung“ N hat also die Zeiger:

(N) $$\alpha = \frac{\pi}{2}, \qquad z = 0, \qquad P = -m.$$

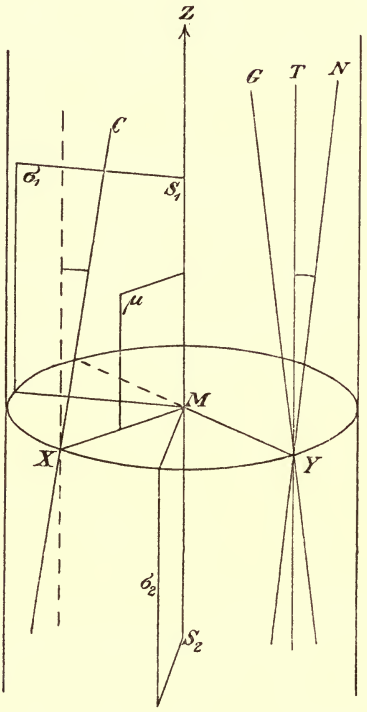

Fig. 19.

Wir betrachten jetzt die Gesamtheit der Richtungen

(g) $$\alpha = \frac{\pi}{2}, \qquad z = 0, \qquad P \text{ beliebig.}$$

Dieselben sind alle im Komplex vertreten, bilden aber auch ein Richtungsbüschel, weil sie die Richtungen sind, die um einen Strahl eines Normalennetzes (Bd. I, § 74) vorkommen. Dieses Büschel enthält die Richtungen T und N wird also durch g abgebildet und muß auch G und S enthalten. Durch

Anwendung des Satzes 99 auf die Richtungen G und N finden wir, daß hier $P = -P'$ sein muß. Die repräsentierende Gerade G berührt also den Zylinder des § 41 in Y (wie auch N) und ist (Fig. 19) gegen T nach der anderen Seite gleich geneigt wie N. Die zugehörige Richtung heiße „Gegenrichtung". Ihre Zeiger sind

$$\text{(G)} \qquad \alpha = \frac{\pi}{2}, \qquad z = 0, \qquad P = m.$$

Die Richtung S ist außer T die einzige schneidende des „Gegenbüschels" g, hat also die Zeiger:

$$\text{(S)} \qquad \alpha = \frac{\pi}{2}, \qquad z = 0, \qquad P = 0.$$

Sie ist durch einen Nachbarstrahl der Z-Achse durch den Ursprung M in der XZ-Ebene μ repräsentiert; M ist Kuspidalpunkt und μ Kuspidalebene der Regelflächen dieser Richtung, der „schneidenden Zentralrichtung". Sie ist in Fig. 19 durch das Punkt-Ebenenpaar M, μ dargestellt.

Wenn eine Kongruenz des Komplexes im betrachteten Strahl einen Normalstrahl hat, so wollen wir sagen, die in ihr vertretenen Richtungen bilden ein „Normalbüschel". Wir wollen die Bilder aller Normalbüschel suchen. Ein solches ist durch zwei schneidende Richtungen R_1 und R_2 bestimmt, deren Kuspidalebenen (als Brennebenen des Normalstrahles) aufeinander senkrecht stehen. Die Zeiger von R_1 seien (s. auch Gleichung (33)):

$$\alpha', \quad P' = 0, \quad z' = m \cot \alpha'.$$

Setzen wir sie in (101) ein und berücksichtigen (§ 41)

$$\text{(102)} \qquad z \operatorname{tg} \alpha = m + P,$$

so bekommen wir die Beziehung

$$P \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha' + m \operatorname{tg} \alpha \cot \alpha' + z \operatorname{tg} \alpha' = 2m,$$

die für die Zeiger α, z, P aller Richtungen gilt, deren Bilder auf der Tangente τ_1 von R_1 (Fig. 18) liegen. Setzen wir hier $\alpha' + \frac{\pi}{2}$ statt α', so bekommen wir die entsprechende Gleichung für R_2. Durch Subtraktion beider ergibt sich mit Rücksicht auf (102) für den Pol R von

$R_1 R_2$ unabhängig vom Werte α' die Bedingung

$$z^2 + (P + m)^2 = 0 ,$$

die nur durch $z = 0$, $P = -m$ erfüllt werden kann, d. h. der Pol R des Bildes jedes Normalbüschels liegt auf der isotropen Geraden i oder

Satz 100: Die Normalbüschel werden durch die Strahlen des Büschels G abgebildet.

Schreiben wir (101) in der Form

$$(z - z')(\operatorname{tg}\alpha \cot\alpha' - 1) = (P + P')(\cot\alpha' + \operatorname{tg}\alpha)$$

und setzen die Zeiger $\alpha' = \frac{\pi}{2}$, $z' = 0$, $P' = -m$ der isotropen Nebenrichtung ein, so erhalten wir mit Rücksicht auf (102)

$$z^2 + P^2 - m^2 = 0 ,$$

also für die schneidenden Richtungen S_1, S_2 des Büschels CG

$$(S_1, S_2) \qquad z = \pm m , \quad \alpha = \pm\frac{\pi}{4} .$$

Sie sind in Fig. 19 durch die Punkt-Ebenenpaare S_1, σ_1; S_2, σ_2 dargestellt.

c) Wir wollen jetzt die Zeiger der ausgezeichneten Richtungen und die Gleichungen der ausgezeichneten Richtungsbüschel bestimmen: Nach (94a) und (99) ist

$$|M_{kl}| = \Delta^2 = 0 . \tag{103}$$

Also bestätigt sich, daß $\mathfrak{M}$ in ein Geradenpaar zerfällt. Die Zeiger seines Schnittpunktes T erfüllen gleichzeitig

$$p'_1 = p'_2 = p'_3 = 0 .$$

Bezeichnet man also mit δ_{kl} die Adjunkten der Elemente von Δ, so sind

$$\text{die Zeiger von } (T) \qquad \delta_{\mu 1} : \delta_{\mu 2} : \delta_{\mu 3} , \tag{104}$$

wobei μ beliebig bleibt. Der zerfallende Kegelschnitt des Büschels (98) ist durch

$$|M_{kl} P - A_{kl}| = 0 \tag{105}$$

bestimmt. Entwickelt man diese Determinante nach Potenzen von P, so verschwindet, wie zu erwarten, auch der

Koeffizient von P^2. Denn er ist (bis aufs Vorzeichen) die Summe dreier Determinanten, die aus $|M_{kl}|$ hervorgehen, wenn man eine Zeile durch die entsprechenden A_{kl} ersetzt. Nun kann man den Koeffizienten von p_{4u} in der doppelten Summe aller drei Determinanten in

$$2\begin{vmatrix} p_{1u} & p_{1v} & p_{1w} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{vmatrix}$$

umformen. Diese Determinante verschwindet aber als Produkt von Δ mit

$$\begin{vmatrix} 1 & p_{1v} & p_{1w} \\ 0 & p_{2v} & p_{2w} \\ 0 & p_{3v} & p_{3w} \end{vmatrix}.$$

Also wird (105) eine lineare Gleichung für P; ihre Wurzel P_i ist, wenn wir setzen:

$$D_1 = \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} \tag{106}$$

und analog D_2, D_3 bilden:

$$P_i = \frac{|A_{kl}|}{D_1 + D_2 + D_3}. \tag{107}$$

Hiermit ist nach (100) auch die Umgebungsgröße m für die Parameterdarstellung berechnet; für die homogene Darstellung haben wir dasselbe schon in § 42 getan. Setzen wir $P = P_i$ in (105) ein und nennen dann $\mathfrak{P}_{kl}$ die Adjunkten der Elemente, so sind*) die

$$\text{Zeiger von } (C): \quad \mathfrak{P}_{k1} : \mathfrak{P}_{k2} : \mathfrak{P}_{k3}. \tag{108}$$

Wenn wir von den Richtungszeigern $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ zu deren Bedeutung u'_1, u'_2, u'_3 zurückkehren, so können wir die Gleichung von t in der Form ansetzen:

$$\sum_1^3 t_\lambda u'_\lambda = 0, \tag{109}$$

*) Vergleiche z. B. Killing, Analyt. Geom. I, § 16.

LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

analog die der isotropen Geraden i:

$$\sum_1^3 i_\nu u'_\nu = 0 . \tag{110}$$

Weil t die Polare von T in bezug auf $\mathfrak{Z}$ ist, finden wir

$$t_\lambda = \sum_{k=1}^{3} A_{k\lambda}\, \delta_{\mu k} \qquad (\lambda = 1, 2, 3) . \tag{111}$$

Ferner ist identisch

$$\sum_{k,l} (M_{kl} P_i - A_{kl})\, u'_k u'_l = \sum t_\lambda u'_\lambda \cdot \sum i_\nu u'_\nu .$$

Man kann also die i_ν auf mehrfache Art rational berechnen, z. B. aus:

$$t_\nu i_\nu = M_{\nu\nu} P_i - A_{\nu\nu} \qquad (\nu = 1, 2, 3) . \tag{112}$$

Nun kann man g als Polare von C (Fig. 18), dann N als Schnitt von g und i, dann n als Polare von N, dann G als Schnitt von g und n oder als Pol von i finden usw. Will man die Voraussetzung (95) vermeiden, so hat man die Zeiger von T proportional den Adjunkten von $|N_{kl}|$ zu setzen; auch der übrige Rechnungsgang ist analog. Ein Beispiel folgt in § 53.

Wir sind jetzt in der Lage, mit Hilfe der in § 2 vorbereiteten Formeln die Zeiger des Zentralpunktes und der Zentralebene eines Komplexstrahles explizite als Funktionen von u, v, w zu berechnen. Denn wir kennen Richtungen (die des isotropen Büschels), für deren Regelflächen der Zentralpunkt der Regelfläche mit dem des Komplexstrahles zusammenfällt. Wenn wir also die Zeiger u', v', w' einer beliebigen Richtung des isotropen Büschels zunächst in

$$p'_\mu = p'_{\mu 1} u' + p'_{\mu 2} v' + p'_{\mu 3} w'$$

einsetzen und dann diese Werte p'_μ in die Gleichung (17) des § 2, so bekommen wir den Zentralpunkt. Insbesondere ist die isotrope Zentralrichtung in analoger Art auch zur Berechnung der Zentralebene und die zylindrische Richtung zur Berechnung der asymptotischen Ebene tauglich.

§ 49. Ausgezeichnete Zerlegungen eines Komplexes.

Wir legen in diesem Paragraphen die Parameterdarstellung

$$p_i = p_i(u_1, u_2, u_3) \qquad (i = 1, \ldots, 6) \tag{86}$$

zugrunde.

a) Wir fragen, ob ein Komplex in ∞^1 isotrope Kongruenzen zerlegt werden kann. Wäre

$$f(u_1 u_2 u_3) = \text{const.} \tag{113}$$

die Gleichung dieser Kongruenzenschar, so wäre

$$\sum_1^3 f_\lambda u'_\lambda = 0 \tag{114}$$

für jeden Komplexstrahl die Beziehung zwischen den Zeigern derjenigen Richtungen, die in der Kongruenz $\mathfrak{C}$ der Schar (113) vorkommen, welcher der Strahl s angehört. Da $\mathfrak{C}$ eine isotrope Kongruenz sein soll, so müßte die Gleichung (114) mit (110) (bis auf einen Faktor) übereinstimmen. Die Zerlegung in isotrope Kongruenzen hängt also von der Integration der Gleichung

$$\sum_1^3 i_\nu \, du_\nu = 0 \tag{115}$$

ab, wo die i_ν nach (111) und (112) bekannte Funktionen von u_1, u_2, u_3 sind. Die Integrabilitätsbedingung ist*)

$$\left\{ \begin{array}{c} i_1 (i_{23} - i_{32}) + i_2 (i_{31} - i_{13}) + i_3 (i_{12} - i_{21}) = 0 , \\ i_{\lambda\mu} = \dfrac{\partial i_\lambda}{\partial u_\mu} . \end{array} \right. \tag{116}$$

Satz 101: Ist ein Komplex in Parameterdarstellung gegeben, so kann man bloß durch Differentiationen entscheiden, ob er in isotrope Kongruenzen zerlegbar ist. Im bejahenden Falle erfordert die Zerlegung die Integration einer totalen Differentialgleichung in drei Veränderlichen.

*) Vergleiche z. B. Lie und Scheffers, Geometrie der Berührungstransformationen, S. 198.

Auch wenn die Bedingung (116) nicht identisch erfüllt ist, können einzelne isotrope Kongruenzen im Komplex enthalten sein. Dann bedeutet nämlich (116) eine Beziehung zwischen u_1, u_2, u_3 und falls diese die Gleichung (115) befriedigt, so ist sie eine singuläre Lösung derselben. Zerfällt (116) in mehrere Faktoren, so ist jeder einzelne zu prüfen.

b) Wir fragen, ob ein Komplex in ∞^1 Normalenkongruenzen zerlegt werden kann*). Wäre (113) diese Zerlegung, so müßte das Richtungsbüschel (114) ein Normalbüschel sein. Sind also

$$g = \Sigma g_\nu u'_\nu = 0\,, \quad n = \Sigma n_\nu u'_\nu = 0$$

die Gleichungen des Gegenbüschels und des Büschels GC (Fig. 18), Gleichungen, die man nach dem vorigen Paragraphen durch ausführbare Operationen berechnen kann, so ist nach Satz (100)

$$g + \lambda n = 0 \tag{117}$$

die Gleichung eines beliebigen Normalbüschels, wobei λ eine Funktion von u_1, u_2, u_3 sein kann. Durch passende Wahl derselben muß (117) mit (114) (bis auf einen Faktor) identisch werden. Es handelt sich also um Integration der totalen Differentialgleichung

$$\sum_1^3 (g_\nu + \lambda n_\nu)\, du_\nu = 0\,. \tag{118}$$

Diese ist zuerst integrabel zu machen, indem man (vgl. die Bedingung (116)) für λ ein Integral der linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \end{vmatrix} = (n, n)\lambda^2 + [(g, n) + (n, g)]\lambda + (g, g) \tag{119}$$

setzt, wobei

$$\lambda_\nu = \frac{\partial \lambda}{\partial u_\nu}\,, \quad (a, b) = a_1(b_{23} - b_{32}) + a_2(b_{31} - b_{13}) + a_3(b_{12} - b_{21})\,.$$

Satz 102: Es gibt immer Zerlegungen eines Komplexes in ∞^1 Normalenkongruenzen. Zur Auffindung

*) Für die homogene Darstellung wird diese Frage in § 52, b) behandelt werden.

einer solchen Zerlegung ist die Kenntnis eines partikulären Integrals der Gleichung (119) und die Integration einer totalen Differentialgleichung nötig.

c) Wir fragen nach den parabolischen Kongruenzen eines Komplexes und schreiben jetzt u, v, w statt u_1, u_2, u_3. Es sei durch

$$w = w(u, v) \tag{120}$$

eine Kongruenz im Komplex definiert. Das zugehörige Richtungsbüschel ist durch

$$w' = w_u \mathfrak{u} + w_v \mathfrak{v} \tag{121}$$

gegeben. Setzt man dies in die quadratische Form $\mathfrak{Z}$ (Zähler von 92) ein, so erhält man

$$\mathfrak{Z}_1 = B_{11} \mathfrak{u}^2 + 2 B_{12} \mathfrak{u}\mathfrak{v} + B_{22} \mathfrak{v}^2 , \tag{122}$$

wobei

$$\left\{ \begin{aligned} B_{11} &= A_{33} w_u^2 \quad + 2 A_{13} w_u + A_{11} , \\ B_{22} &= A_{33} w_v^2 \quad + 2 A_{23} w_v + A_{22} , \\ B_{12} &= A_{33} w_u w_v + A_{23} w_u \quad + A_{13} w_v + A_{12} . \end{aligned} \right. \tag{123}$$

Soll jeder Strahl der Kongruenz parabolisch sein, so muß das Richtungsbüschel (121) den Kegelschnitt $\mathfrak{Z}$ berühren; also muß $\mathfrak{Z}_1 = 0$ eine Doppelwurzel haben. Auch aus § 27 (namentlich Satz 57) folgt unmittelbar, daß

$$B_{11} B_{22} - B_{12}^2 = 0 \tag{124}$$

sein muß. Setzt man hier die Ausdrücke (123) ein, so wird dies eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung*), die in w_u und w_v vom zweiten Grade ist.

---

§ 50. Orthogonale Trajektorien und Parameter.

Sei durch (86) und

$$f(u_1, u_2, u_3) = \text{const.} \tag{125}$$

eine Schar von ∞^1 Kongruenzen gegeben. Wir suchen die orthogonalen Trajektorien dieser Schar im Komplex,

*) Die entsprechende Differentialgleichung für die homogene Darstellung wurde von Klein (Math. Ann. V, „Ueber gewisse in der Liniengeom. auftretende Differentialgl.“) aufgestellt.

d. h. diejenigen Regelflächen des Komplexes, die in jedem Strahl die durchgehende Kongruenz der Schar (125) senkrecht schneiden. Das Richtungsbüschel der Kongruenz ist durch

$$\Sigma f_\lambda u'_\lambda = 0\,, \qquad f_\lambda = \frac{\partial f}{\partial u_\lambda} \tag{126}$$

gegeben. Die einzige Richtung des Komplexes, die zu allen Richtungen dieses Büschels senkrecht steht, wird durch den Pol von (126) bezüglich $\mathfrak{Z}$ abgebildet (Satz 91). Um die Zeiger u'_λ dieses Pols zu finden, haben wir die Gleichungen

$$\sum_{\lambda=1}^{3} A_{\varkappa\lambda} u'_\lambda = f_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, 3) \tag{127}$$

nach den u'_λ aufzulösen. Also können wir setzen

$$u'_1 : u'_2 : u'_3 = \varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3\,,$$

wobei die φ bekannte Funktionen der u_λ sind. Die Auffindung der erwähnten Trajektorien hängt nun von der Integration des simultanen Systems in drei Veränderlichen ab:

$$\frac{du_1}{\varphi_1} = \frac{du_2}{\varphi_2} = \frac{du_3}{\varphi_3}\,. \tag{128}$$

b) Wir wollen jetzt der Frage näher treten, ob eine gegebene Kongruenzenschar

$$f(u_1, v_1, w_1) = \text{const.} \tag{129}$$

eines gegebenen Komplexes einem dreifach orthogonalen System (§ 47) angehören kann. Für den Punktraum ist die analoge Frage dahin beantwortet, daß die Funktion f, die in diesem Falle eine Flächenschar darstellt, einer gewissen partiellen Differentialgleichung dritter Ordnung genügen muß (Darboux, Syst. orthog. S. 18). Da die Aufsuchung einer analogen Gleichung hier entsprechend komplizierter sein dürfte, wollen wir uns damit begnügen, die Frage unter der Voraussetzung zu beantworten, daß die senkrechten Trajektorien der Schar (129) bekannt sind. Ihre Gleichungen seien etwa

$$g(u_1, v_1, w_1) = 0\,, \qquad h(u_1, v_1, w_1) = 0\,. \tag{130}$$

Wir führen dann neue Parameter u, v, w durch

$$u = g\,, \quad v = h\,, \quad w = f$$

ein, d. h. wir machen die gegebene Schar zu den u, v-Kongruenzen, die Trajektorien zu den w-Flächen. Dann muß der Punkt mit den Richtungszeigern $u' = v' = 0$ in der Abbildung des § 47 der Pol der Geraden $w' = 0$ bezüglich $\mathfrak{Z}$ sein, d. h. eine Ecke des Grunddreiecks muß Polare der gegenüberliegenden Seite sein, und zwar für die Umgebungen aller Komplexstrahlen zugleich. Dies bringt mit sich, daß in der quadratischen Form $\mathfrak{Z}$ die Glieder mit $u'w'$ und $v'w'$ fehlen, also

$$(131) \qquad \mathfrak{Z} = A_{11}u'^2 + A_{22}v'^2 + A_{33}w'^2 + 2A_{12}u'v' .$$

Soll (129) einem Orthogonalsystem angehören, so muß es jetzt möglich sein, durch passende Zusammenfassung der w-Flächen zu den beiden anderen Kongruenzenscharen des dreifach orthogonalen Systems zu gelangen, d. h. es muß durch eine Transformation zwischen u und v allein

$$u = \varphi(u_2, v_2) , \quad v = \psi(u_2, v_2)$$

A_{12} zum Verschwinden gebracht werden können. Die Bedingung für die Funktionen φ und ψ ist

$$(132) \quad A_{11}\varphi_u\varphi_v + A_{22}\psi_u\psi_v + A_{12}(\varphi_u\psi_v + \varphi_v\psi_u) = 0 .$$

Soll sie durch Funktionen von u_2 und v_2 allein erfüllbar sein, so dürfen A_{11}, A_{22}, A_{12} das w nur in einem gemeinsamen Faktor enthalten. Dies ist also die Bedingung dafür, daß die gegebene Schar einem dreifachen Orthogonalsystem angehört.

---

§ 51. Die Mongesche Gleichung eines Komplexes*).

Seien

$$(133) \qquad \begin{cases} p_1 = x_1 - x , & p_4 = yz_1 - zy_1 , \\ p_2 = y_1 - y , & p_5 = zx_1 - xz_1 , \\ p_3 = z_1 - z , & p_6 = xy_1 - yx_1 \end{cases}$$

die Zeiger der Verbindungslinien zweier Punkte $P \equiv (x, y, z)$ und $P_1 \equiv (x_1, y_1, z_1)$. Halten wir P fest und lassen P_1 eine

*) Der Gegenstand dieses und des folgenden Paragraphen, überhaupt der Zusammenhang der Liniengeometrie mit der Theorie der Differentialgleichungen findet sich ausführlich und anschaulich entwickelt in der „Geometrie der Berührungstransformationen“ von Lie und Scheffers (1896).

Kurve C durch P beschreiben, so sind die Zeiger von P_1 in der Umgebung von P:

$$x_1 = x + x' \cdot \Delta t + \dots \quad \text{usw.}$$

Wenn wir $\lim \frac{p_\nu}{\Delta t} = q_\nu$ setzen, so werden

$$(134) \qquad \begin{cases} q_1 = x' & q_4 = yz' - zy' \\ q_2 = y' & q_5 = zx' - xz' \\ q_3 = z' & q_6 = xy' - yx' \end{cases}$$

die Zeiger der Tangente von C in P. Von diesen sind die drei ersten den Richtungscosinus der Tangente proportional. Da eine Gerade durch einen ihrer Punkte und ihre Richtung bestimmt ist, so könnte man auch

$$(135) \qquad x, y, z; \; x', y', z'$$

als Zeiger der Geraden auffassen. Während aber die Zeiger (134) von der Wahl des Punktes x, y, z auf der Geraden unabhängig sind, ist hier ein bestimmter Punkt P der Geraden ausgezeichnet. Man pflegt daher diese Zeiger nur dann zu verwenden, wenn diese Auszeichnung in der Natur der Sache liegt, wie es der Fall ist, wenn wir eine Kurventangente samt Berührungspunkt oder anders ausgedrückt einen Kurvenpunkt samt der zugehörigen Richtung der Kurve in diesem Punkte analytisch darstellen wollen. Den Inbegriff eines Punktes P samt einer zugehörigen Richtung $\mathfrak{R}$ nennt man ein „Linienelement“ und man sagt, eine Kurve enthalte ein Linienelement oder ein Linienelement gehöre einer Kurve an, wenn die Kurve den Punkt P enthält und wenn daselbst ihre Tangente die Richtung $\mathfrak{R}$ hat. Also sind (135) die Zeiger eines Linienelementes, wobei von den Größen x', y', z' nur ihre Verhältnisse in Betracht kommen. In der Tat sieht man auch unmittelbar geometrisch ein, daß es im Raume ∞^5 (in der Ebene ∞^3) Linienelemente gibt.

Sei anderseits die Gleichung eines Komplexes $\mathfrak{C}$

$$(1) \qquad F(p_1, \dots p_6) = 0$$

gegeben. Soll C Komplexkurve von $\mathfrak{C}$ sein, so müssen die q dieser Gleichung genügen. Also kann man

$$(136) \quad F(x', y', z'; \; yz' - zy', zx' - xz', xy' - yx') = 0$$

insofern als Differentialgleichung sämtlicher Komplexkurven auffassen, als sie die ∞^4 Linienelemente aussondert, die den Komplexkurven angehören*). Die ∞^1 Linienelemente durch einen bestimmten Punkt P sind nichts anderes als der Komplexkegel von P; er heißt, wenn man nur die Umgebung seiner Spitze in Betracht zieht, Elementarkegel von P. Wenn wir F als Funktion der sechs Argumente (135) auffassen, so müssen wir ein anderes Funktionssymbol verwenden. Wir setzen also identisch

$$(137)\quad F(x', y', z';\ yz' - zy', \ldots) = \Omega(x, y, z;\ x', y', z')\,.$$

Die erwähnte Differentialgleichung wird jetzt

$$(138)\qquad \Omega(x, y, z;\ x', y', z') = 0\,.$$

Jede solche Gleichung, die in x', y', z' homogen ist, heißt nach Lie eine Mongesche Differentialgleichung, und jede Kurve, deren sämtliche Linienelemente ihr genügen, heißt Integralkurve der Mongeschen Gleichung. Multipliziert man sie mit dt^n, so kann man sie auch in der Form schreiben:

$$\Omega(x, y, z;\ dx, dy, dz) = 0\,.$$

Satz 103: Zu jedem Komplex n-ten Grades gehört eine Mongesche Differentialgleichung, die in x', y', z' auch vom n-ten Grade ist.

Aber nicht umgekehrt, weil sich nicht jede Mongesche Gleichung in der Form (136) schreiben läßt. Um die Bedingung hierfür zu finden, differenzieren wir die Identität (137) nach x, y, z und bezeichnen mit F_k die Ableitung von F nach dem k-ten Argument:

$$\begin{aligned} -z'F_5 + y'F_6 &= \Omega_x \\ -x'F_6 + z'F_4 &= \Omega_y \\ -y'F_4 + x'F_5 &= \Omega_z\,. \end{aligned}$$

Hieraus folgt als notwendige Bedingung:

$$(139)\qquad x'\Omega_x + y'\Omega_y + z'\Omega_z = 0\,.$$

*) Analog sondert ja auch eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung zwischen x und y von den ∞^3 Linienelementen der Ebene diejenigen ∞^2 aus, die den Integralkurven angehören.

Um zu zeigen, daß sie auch hinreicht, betrachten wir sie als partielle Differentialgleichung für Ω als Funktion aller sechs Argumente*), die jetzt als sechs unabhängige Veränderliche aufzufassen sind. Eine solche Gleichung hat fünf voneinander abhängige Integrale $\Omega_1, \ldots \Omega_5$ und jedes andere Integral Ω ist eine Funktion dieser fünf**). Hier kann man die sechs Integrale

$$\Omega_1 = x' \qquad \Omega_4 = y\,z' - z\,y'$$
$$\Omega_2 = y' \qquad \Omega_5 = z\,x' - x\,z'$$
$$\Omega_3 = z' \qquad \Omega_6 = x\,y' - y\,x'$$

angeben, von denen je fünf unabhängig sind, während zwischen allen sechs die Relation $\sum_1^3 \Omega_\nu\,\Omega_{\nu+3} = 0$ besteht. Wenn also Ω der Gleichung (139) genügt, so kann es als Funktion von $\Omega_1, \ldots \Omega_5$, um so mehr von $\Omega_1, \ldots \Omega_6$ aufgefaßt werden. Wir sind daher jetzt berechtigt, eine Identität der Form (137) anzusetzen (im umgekehrten Sinne zu lesen) und es ist nur noch zu zeigen, daß F in den sechs Argumenten homogen ist. Wir finden durch Differentiation von (137) nach x', y', z':

$$F_1 + z\,F_5 - y\,F_6 = \frac{\partial\,\Omega}{\partial\,x'},$$

$$F_2 + x\,F_6 - z\,F_4 = \frac{\partial\,\Omega}{\partial\,y'},$$

$$F_3 + y\,F_4 - x\,F_5 = \frac{\partial\,\Omega}{\partial\,z'}.$$

Da nun Ω in x', y', z' homogen ist, folgt

$$x'F_1 + y'F_2 + z'F_3 + (y\,z' - z\,y')\,F_4 + (z\,x' - x\,z')\,F_5 + (x\,y' - y\,x')\,F_6 = n\,\Omega = n\,F\,.$$

Dies ist aber genau die Bedingung der Homogeneität von F.

Satz 104: Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Mongesche Gleichung (138)

*) Lie und Scheffers, a. a. O. S. 252. Der Gebrauch der zweiten Ableitungen läßt sich dabei vermeiden.

**) Vgl. z. B. Goursat, Vorl. über part. Differentialgl. erster Ordnung, § 17.

einem Komplex zugehört oder, was dasselbe ist, daß unter ihren Integralkurven ∞^3 Gerade vorkommen, ist:

$$x' \frac{\partial \Omega}{\partial x} + y' \frac{\partial \Omega}{\partial y} + z' \frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0 .$$

Die Mongesche Gleichung eines Komplexes $\mathfrak{C}$ kann dazu benützt werden, die Differentialgleichung derjenigen Komplexkurven aufzustellen, die auf einer willkürlich gewählten Fläche

$$f(x, y, z) = 0 \tag{140}$$

liegen. Für die Linienelemente aller Kurven auf f ergibt sich nämlich die Bedingung

$$f_x x' + f_y y' + f_z z' = 0 . \tag{141}$$

Diese und (140) gestatten, aus (138) einen Zeiger und die zugehörige Ableitung, z. B. z, z' zu eliminieren, wodurch eine Differentialgleichung

$$\Phi(x, y; x', y') = 0 \tag{142}$$

hervorgeht. Sie ist in x', y' homogen, läßt sich also in der Form

$$\Psi\left(x, y, \frac{y'}{x'}\right) = 0$$

schreiben. Wegen $\frac{y'}{x'} = \frac{dy}{dx}$ ist dies eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung zwischen x und y, welche die Projektion der gesuchten Kurven auf die XY-Ebene bestimmt. Allgemeiner: Man kann in (142) wegen der Unbestimmtheit der Parameterdarstellung x willkürlich als Funktion von t wählen, worauf sich für y eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung ergibt. Da der Elementarkegel eines Punktes von f die Berührungsebene von f nach Satz 103 in n Strahlen schneidet, so wird die Fläche f von den Komplexkurven n-fach überdeckt, wenn nicht etwa für alle Flächenpunkte der Elementarkegel die Fläche f berührt.

Ist insbesondere die Gleichung (138) bezüglich x', y', z' linear, so heißt sie eine Pfaffsche Gleichung*):

$$Ax' + By' + Cz' = 0 . \tag{143}$$

*) Gleichungen von der Form $\Sigma A_\lambda \, dx_\lambda = 0$ zwischen beliebig vielen Veränderlichen betrachtete Pfaff in den Abh. der Berliner Akad. 1814—15.

wobei A, B, C Funktionen von x, y, z sind. Die differentialgeometrischen Probleme, die sich an eine solche Gleichung knüpfen, hat Voß (Math. Ann. Bd. XVI und XXIII) behandelt. Uns interessiert in der Liniengeometrie nur der Fall, daß sie zugleich als Mongesche Gleichung einem Komplex zugehört. Dieser kann nach Satz 103 nur ein linearer Komplex sein. Dann müssen aber nach der Entstehungsweise der Mongeschen Gleichung aus der Komplexgleichung A, B, C lineare Funktionen von x, y, z sein, etwa

$$\begin{aligned} A &= a_1 x + a_2 y + a_3 z + a\,, \\ B &= b_1 x + b_2 y + b_3 z + b\,, \\ C &= c_1 x + c_2 y + c_3 z + c\,. \end{aligned}$$

Die Bedingung (139) gibt

$$\begin{aligned} a_1 x'^2 + b_2 y'^2 + c_3 z'^2 + (a_2 + b_1)\, x' y' + (b_3 + c_2)\, y' z' \\ + (c_1 + a_3)\, z' x' = 0\,, \end{aligned}$$

und zwar muß diese Gleichung für alle Werte x', y', z' erfüllt sein. Daraus folgt, wenn wir

$$b_1 = -a_2 = \gamma\,, \quad c_2 = -b_3 = \alpha\,, \quad a_3 = -c_1 = \beta$$

setzen:

Satz 105: Die Pfaffsche Gleichung eines linearen Komplexes hat die Form:

$$(144) \qquad \begin{cases} (\beta z - \gamma y + a)\, x' + (\gamma x - \alpha z + b)\, y' \\ \qquad + (\alpha y - \beta x + c)\, z' = 0\,. \end{cases}$$

Derselbe ist ein Strahlengebüsch oder ein Strahlengewinde, je nachdem $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$ ist oder nicht.

Der letzte Teil des Satzes ergibt sich, wenn man (144) in der Form

$$(145) \qquad ax' + by' + cz' + \alpha\,(yz' - zy') + \ldots = 0$$

schreibt, die der Gleichung (136) entspricht. Natürlich hätte man auch von (145) ausgehen und hieraus den Satz 105 ableiten können.

§ 52. Andere Differentialgleichungen.

Sei

$$z = f(x, y)$$

die Gleichung einer Fläche. Setzt man

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p\,, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = q\,,$$

so ist

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y)$$

die Gleichung der Berührungsebene. Die Richtungskosinus der Flächennormalen verhalten sich also wie

$$p : q : -1\,.$$

Wenn wir den Inbegriff eines Punktes samt einer durch ihn gehenden Ebene „Flächenelement" nennen, sofern von der Ebene nur die Umgebung des Punktes in Betracht kommt, so können wir die fünf Größen

$$x, y, z, p, q \tag{146}$$

als Zeiger eines Flächenelementes auffassen. Wir sagen, ein Flächenelement, das aus dem Punkte P und der Ebene E besteht, gehöre einer Fläche f an oder f enthalte das Element, wenn P auf f liegt und E die Berührungsebene von f in P ist. Eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \tag{147}$$

kann man so auffassen, daß durch sie aus den ∞^5 Flächenelementen des Raumes ∞^4 ausgesondert werden und die Integralflächen sind diejenigen, deren Flächenelemente alle der Gleichung (147) genügen.

b) Man soll eine Fläche f finden, deren sämtliche Normalen einem gegebenen Komplex angehören. Für einen Punkt P von f muß die Normale von f zugleich Linienelement des Elementarkegels von P sein. D. h. setzt man die Werte $p, q, -1$, die dem Punkte P der gesuchten Fläche zukommen, statt x', y', z' in die Mongesche Gleichung des Komplexes ein, so muß diese erfüllt sein. Als partielle Differentialgleichung aller gesuchten Flächen erhält man also aus (138):

$$\Omega(x, y, z; p, q, -1) = 0\,. \tag{148}$$

Diese Gleichung erster Ordnung ist im allgemeinen vom n-ten Grade, während wir nach der Methode des § 49b) unmittelbar zu einer linearen Differentialgleichung gelangt sind (allerdings in drei unabhängigen Veränderlichen), worauf noch eine totale Gleichung zu integrieren war. Dasselbe verlangt die Methode von Transon, der seit Malus*) zuerst (J. de l'École polyt. 1861) dieses Problem wieder behandelt hat (vgl. Lie und Scheffers, a. a. O. S. 676, f.).

c) Wir suchen jetzt die Flächen f, die in allen ihren Punkten von den zugehörigen Komplexkegeln eines gegebenen Komplexes berührt werden. Das Flächenelement irgend eines Punktes P von f muß den Elementarkegel $\mathfrak{K}$ von P berühren. Seine Normale $p, q, -1$ muß also mit einer Flächennormale von $\mathfrak{K}$ zusammenfallen, dessen Gleichung die Mongesche Gleichung ist:

$$\Omega(x, y, z; x', y', z') = 0, \tag{138}$$

wenn man hierin $x' : y' : z'$ als homogene Zeiger im Strahlenbündel P auffaßt. Nun verhalten sich die Richtungskosinus einer Normale von $\mathfrak{K}$ wie

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x'} : \frac{\partial \Omega}{\partial y'} : \frac{\partial \Omega}{\partial z'}.$$

Also ist

$$p = -\frac{\partial \Omega}{\partial x'} : \frac{\partial \Omega}{\partial z'}, \qquad q = -\frac{\partial \Omega}{\partial y'} : \frac{\partial \Omega}{\partial z'}. \tag{149}$$

Um eine Beziehung zwischen den Zeigern der ∞^4 Flächenelemente abzuleiten, die alle Elementarkegel in ihren Scheiteln berühren, hat man aus den drei Gleichungen (138) und (149) $x' : y' : z'$ zu eliminieren. Dadurch ergibt sich eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung:

$$F(x, y, z, p, q) = 0. \tag{150}$$

Für den Fall der Pfaffschen Gleichung wird das Verfahren illusorisch, wie auch zu erwarten war. Denn eine Pfaffsche Gleichung ordnet jedem Punkt des Raumes ein ebenes Strahlbüschel von Linienelementen zu und die Aufgabe würde verlangen, Flächen zu finden, die in allen ihren

*) Vergleiche meinen Bericht über differentielle Liniengeometrie in den Jahresb. d. D. Math.-Vereinigung, Bd. XV, 1906.

Punkten von der Ebene des zugehörigen Büschels berührt werden. Dies ist aber nur in dem Spezialfall möglich, wenn die Pfaffsche Gleichung integrabel ist.

d) Wir schlagen jetzt den umgekehrten Weg ein: Sei eine partielle Differentialgleichung (150) gegeben, die nicht linear sei. Sie ordnet jedem Punkte P einfach unendlich viele Flächenelemente zu, die eine Kegelfläche $\mathfrak{K}$ umhüllen. Wir wollen aber jetzt $\mathfrak{K}$ als von Linienelementen erzeugt auffassen. Es handelt sich darum, dasjenige Linienelement $\mathfrak{L} \equiv (x', y', z')$ zu bestimmen, längs dessen $\mathfrak{K}$ von einem bestimmten Flächenelement $\mathfrak{F} \equiv (p, q)$ des Punktes P berührt wird. Da $\mathfrak{L}$ auf der Normalen von $\mathfrak{F}$ senkrecht steht, haben wir

$$x'p + y'q - z' = 0 . \tag{151}$$

Da nun $\mathfrak{L}$ die Grenzlage der Schnittlinie von $\mathfrak{F}$ mit einem Nachbarelement ist, haben wir auch:

$$x'p' + y'q' = 0 , \tag{152}$$

Ferner gilt für die Wälzung der Ebene um $\mathfrak{K}$, da hierbei P fest bleibt:

$$F_p p' + F_q q' = 0 ,$$

so daß man (152) durch

$$x' F_q - y' F_p = 0 \tag{153}$$

ersetzen kann. Aus (151) und (153) folgt jetzt:

$$x' : y' : z' = F_p : F_q : p F_p + q F_q . \tag{154}$$

Um eine Beziehung zwischen den Zeigern der Linienelemente aller Kegel $\mathfrak{K}$ zu finden, hat man p, q aus den drei Gleichungen (150) und (154) zu eliminieren. Es gehört also auch umgekehrt zu jeder partiellen Differentialgleichung erster Ordnung eine Mongesche Gleichung: dieselbe wird aber im allgemeinen keinem Komplex zugehören. Die Bedingung hierfür findet man in Lie und Scheffers a. a. O. S. 640, f. Wir wollen nur noch diese spezielle Klasse von Differentialgleichungen geometrisch charakterisieren, müssen aber zuvor an den Satz aus der Theorie der nicht linearen partiellen Differentialgleichungen in zwei unabhängigen Veränderlichen erinnern, daß zu jeder solchen Gleichung ∞^3 Kurven, „Charakteristiken“ gehören, aus denen sich alle Integralflächen zusammensetzen lassen (a. a. O. S. 498, f) und zwar geht

aus den simultanen Differentialgleichungen der Charakteristiken (a. a. O. S. 509) hervor, daß das Linienelement (154), längs dessen eine Integralfläche durch P vom Elementarkegel berührt wird, auch der durch P gehenden Charakteristik der Integralfläche angehört. Die Schmiegungsebene der Charakteristik als einer Komplexkurve berührt auch $\mathfrak{K}$ (Satz 86), also auch die Integralfläche. Daraus folgt:

Satz 106: Eine partielle Differentialgleichung, die durch das Verfahren unter c) aus der Mongeschen Gleichung eines Komplexes hervorgeht, hat die Besonderheit, daß ihre Charakteristiken Haupttangentenkurven auf den Integralflächen sind.

Die Frage nach diesen Flächen eines Komplexes hängt eng mit der in § 49, c) behandelten Aufgabe zusammen, die parabolischen Kongruenzen eines Komplexes zu finden. Wenn nämlich die Charakteristiken auf einer bestimmten Integralfläche nicht etwa gerade Linien sind, so bilden ihre ∞^2 Tangenten nach Satz 57 eine parabolische Kongruenz. Umgekehrt ist die Brennfläche einer im Komplex enthaltenen parabolischen Kongruenz eine Integralfläche des Satzes 106.

---

§ 53. Das Strahlengewinde.

Wir wollen die Entwicklungen der vorhergehenden Paragraphen durch Anwendungen auf das Strahlengewinde erläutern:

a) Wir verlegen die Z-Achse eines rechtwinkligen Systems in die Achse des Gewindes. Dann lautet seine Gleichung (Bd. I, § 46):

$$q_6 + \mathfrak{k}\, q_3 = 0 . \tag{155}$$

Die Zeiger desjenigen Gewindestrahles, der die X-Achse im Abstand u vom Ursprung senkrecht schneidet, lauten (er bilde den Winkel v mit der Y-Achse):

$$\begin{cases} q_1 = 0 , & q_2 = \mathfrak{k} , & q_3 = -u , \\ q_4 = 0 , & q_5 = u^2 , & q_6 = \mathfrak{k}\, u . \end{cases} \tag{156}$$

Man kann dies auf folgende Art bestätigen: Für $\tan v$ ergibt sich aus (156) der Wert:

$$\frac{q_3}{q_2} = -\frac{u}{\mathfrak{k}} ,$$

wie es auch nach Bd. I, § 8, Gleichung (14) sein muß. Ferner ergibt sich q_6 aus (155) und q_5 aus der Beziehung zwischen den Linienzeigern. Dreht man den Strahl um den Winkel v um die Z-Achse, so werden seine neuen Zeiger (Bd. I, § 41):

$$(157)\quad \begin{cases} q_1 = -\mathfrak{k}\sin v\,, & q_2 = \mathfrak{k}\cos v\,, & q_3 = -u\,, \\ q_4 = -u^2\sin v\,, & q_5 = u^2\cos v\,, & q_6 = \mathfrak{k}u\,. \end{cases}$$

Verschiebt man ihn schließlich*) um w in der Z-Richtung und ändert das Vorzeichen aller Zeiger, so erhält man:

$$(158)\quad \begin{cases} p_1 = \mathfrak{k}\sin v & p_4 = \mathfrak{k}w\cos v + u^2\sin v \\ p_2 = -\mathfrak{k}\cos v & p_5 = \mathfrak{k}w\sin v - u^2\cos v \\ p_3 = u & p_6 = -\mathfrak{k}u\,. \end{cases}$$

Aus der Entstehungsweise dieser Parameterdarstellung geht hervor: Die u-Flächen sind die gleichseitigen Paraboloide, deren Haupterzeugende die Achse des Gewindes senkrecht schneiden; die v-Flächen sind Umdrehungshyperboloide, die w-Flächen Parallelstrahlenbüschel.

b) Hier werden die Größen (93) und (94):

$$(93a)\quad \begin{cases} A_{11} = -\mathfrak{k} & A_{22} = \mathfrak{k}u^2 & A_{33} = 0 \\ A_{12} = 0 & A_{23} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{k}^2 & A_{31} = 0 \end{cases}$$

$$(94b)\quad \begin{cases} N_{11} = \mathfrak{k}^2 & N_{22} = \mathfrak{k}^2(\mathfrak{k}^2 + u^2) & N_{33} = 0 \\ & N_{12} = N_{23} = N_{31} = 0\,. \end{cases}$$

Die Gleichung des Kegelschnittbüschels (96) wird wegen $p^2 = \mathfrak{k}^2 + u^2$:

$$(96a)\quad P\mathfrak{k}[\mathfrak{u}^2 + (\mathfrak{k}^2 + u^2)\mathfrak{v}^2] - (\mathfrak{k}^2 + u^2)[-\mathfrak{u}^2 + u^2\mathfrak{v}^2 + \mathfrak{k}\mathfrak{v}\mathfrak{w}] = 0\,.$$

Die Determinante dieser Gleichung ist

$$-\tfrac{1}{4}\mathfrak{k}^2(\mathfrak{k}^2 + u^2)^2(P\mathfrak{k} + \mathfrak{k}^2 + u^2)\,.$$

Also ergibt sich für den zerfallenden Kegelschnitt des Büschels:

$$(159)\qquad P_i = -\frac{\mathfrak{k}^2 + u^2}{\mathfrak{k}}$$

*) Die Gleichungen (61) in Bd. I, § 41 bleiben richtig, wenn p und $\varkappa$ ihre Bedeutung vertauschen und wenn gleichzeitig der Strahl gegen das feste System um dieselben Komponenten verschoben wird. Analoges gilt vom vorhergehenden Schritte.

und für die Umgebungsgröße nach (100):

$$m = \frac{\mathfrak{k}^2 + u^2}{\mathfrak{k}} . \tag{160}$$

Dies stimmt mit Bd. I, § 58 (namentlich Gleichung (104)) auch dem Vorzeichen nach überein. Denn es ist

$$Km = -1 , \tag{161}$$

wie durch Vergleich der beiden Arten hervorgeht, in denen sich die Gleichung einer und derselben Hauptkorrelation schreiben läßt (Bd. I, § 53, Gleichung 66 und hier § 41):

$$\operatorname{tg}\vartheta = Kz , \quad z \operatorname{tg}\alpha = m .$$

Dabei ist $\alpha = \vartheta + \frac{\pi}{2}$, weil der Richtungszeiger α im Grenzfall der schneidenden Richtungen die Normale der Kuspidalebene bestimmt (§ 19).

c) Die Gleichung des Kegelschnittes $\mathfrak{Z}$ (§ 47) in den laufenden Zeigern $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ hat hier die Form:

$$-\mathfrak{u}^2 + u^2\mathfrak{v}^2 + \mathfrak{k}\mathfrak{v}\mathfrak{w} = 0 . \tag{162}$$

Die Gerade $\mathfrak{v} = 0$ ist also Tangente desselben und für den Berührungspunkt ist auch $\mathfrak{u} = 0$. In der Tat entspricht diesem Eckpunkt des Grunddreiecks die w-Richtung (§ 47). Man sieht sowohl unmittelbar geometrisch als auch aus der Form

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{k}^2[\mathfrak{u}^2 + (\mathfrak{k}^2 + u^2)\mathfrak{v}^2] ,$$

daß die w-Richtung die zylindrische Richtung (§ 41) ist. Daraus folgt, daß $\mathfrak{v} = 0$ die Gleichung des komplementären Büschels ist. Um die übrigen ausgezeichneten Richtungen und Richtungsbüschel zu finden, die in § 41 und § 48 definiert wurden, setzen wir den Wert (159) in (96a) ein, wodurch neben $\mathfrak{v} = 0$ die Gleichung des isotropen Richtungsbüschels hervorgeht:

$$(\mathfrak{k}^2 + 2u^2)\mathfrak{v} + \mathfrak{k}\mathfrak{w} = 0 . \tag{163}$$

Der Schnitt beider gibt die isotrope Zentralrichtung C:

$$\mathfrak{v} = 0 , \quad \mathfrak{w} = 0 . \tag{C}$$

In der Tat sieht man auch geometrisch, daß die u-Richtung die isotrope Zentralrichtung sein muß (Aufg. 44). Die Polare von C bezüglich (162) ist:

$$\mathfrak{u} = 0 . \tag{g}$$

Ihr Schnitt mit (163) gibt die isotrope Nebenrichtung N:

$$(N) \qquad \mathfrak{u} = 0\,, \quad \mathfrak{w} : \mathfrak{v} = -\frac{\mathfrak{k}^2 + 2u^2}{\mathfrak{k}}\,.$$

Die Polare dieses Punktes ist

$$(n) \qquad \mathfrak{k}\mathfrak{v} - \mathfrak{w} = 0\,.$$

Also sind die Zeiger der Gegenrichtung G:

$$(G) \qquad \mathfrak{u} = 0\,, \quad \mathfrak{w} : \mathfrak{v} = \mathfrak{k}\,.$$

Vom Grunddreieck ist (nur) eine Seite $\mathfrak{u} = 0$ die Polare der Gegenecke. Die u-Flächen sind also die senkrechten Trajektorien der Kongruenzen $u = \text{const}$. Aber nach dem Kennzeichen des § 50, b) gehören die letzteren keinem dreifachen Orthogonalsystem an. Denn hierzu dürften die Koeffizienten von $\mathfrak{v}^2$, $\mathfrak{w}^2$ und $\mathfrak{v}\mathfrak{w}$ in (162) das u nur in einem gemeinsamen Faktor enthalten. Es ist also nicht möglich, mit Beibehaltung der Ecke C und der Seite g des Grunddreieckes zu einem dreifachen Orthogonalsystem zu gelangen.

d) Um zu entscheiden, ob in einem Gewinde isotrope Kongruenzen enthalten sind, haben wir nachzusehen (vgl. (163) und § 49, a)), ob die Gleichung

$$(\mathfrak{k}^2 + 2u^2)\,dv + \mathfrak{k}\,dw = 0$$

als totale Differentialgleichung zwischen u, v, w integrabel ist. Die Bedingung hierfür

$$-4\,\mathfrak{k}u = 0$$

ist nicht identisch erfüllt und gibt auch zu keinen vereinzelten isotropen Kongruenzen Anlaß. Denn $u = 0$ bedeutet das Normalennetz der Treffgeraden der Gewindeachse, das keine isotrope Kongruenz ist.

Satz 107: In einem Strahlengewinde ist keine isotrope Kongruenz enthalten.

e) Um ein Gewinde in Normalenkongruenzen zu zerlegen, haben wir nach § 49, b) die Gleichung eines allgemeinen Normalbüschels

$$\lambda g + n = 0$$

aufzuschreiben. Sie lautet hier:

$$\lambda\mathfrak{u} + \mathfrak{k}\mathfrak{v} - \mathfrak{w} = 0\,.$$

Wir haben nun λ so zu bestimmen, daß die entsprechende totale Differentialgleichung

$$\lambda\, du + \mathfrak{k}\, dv - dw = 0 \tag{164}$$

integrabel wird. Dies gibt nach (116) eine partielle Differentialgleichung in den drei unabhängigen Veränderlichen u, v, w:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial v} + \mathfrak{k}\frac{\partial \lambda}{\partial w} = 0\,. \tag{165}$$

Ihr allgemeines Integral lautet:

$$\lambda = \lambda(u,\ \mathfrak{k}\, v - w)\,.$$

Wir dürfen auch $\lambda = \text{const.}$ wählen und betrachten zuerst die beiden Fälle $\lambda = 0, \infty$, in denen die Gleichung (164) bzw. die Integrale

$$\mathfrak{k}\, v - w = \text{const.}, \quad u = \text{const.} \tag{166}$$

hat. Die erste dieser Gleichungen gibt eine Zerlegung des Gewindes in ∞^1 Kongruenzen, von denen jede einzelne erzeugt werden kann, indem man eine u-Fläche derjenigen Schraubung $\mathfrak{S}$ unterwirft, durch die das Gewinde in Bd. I, § 4 definiert wurde. Die zweite Gleichung (166) stellt Kongruenzen dar, von denen eine einzelne aus allen Gewindestrahlen besteht, die einen mit der Achse Z des Gewindes koaxialen Zylinder $\mathfrak{C}$ berühren. Faßt man eine Kongruenz der ersten Zerlegung heraus, so sind die Flächen, deren Normalen diese Kongruenz bilden, eine gewöhnliche (d. h. geschlossene, gerade, vgl. Rohn und Papperitz, Darst. Geom. Bd. II, S. 94) Schraubenfläche und deren Parallelflächen, die nicht mehr durch Bewegung einer Geraden erzeugt werden können. Eine Kongruenz der zweiten Zerlegung enthält die Normalen der Fläche $\mathfrak{F}$, die entsteht, wenn man die Kreisevolvente eines Querschnittes des Zylinders $\mathfrak{C}$ der Schraubung $\mathfrak{S}$ unterwirft. Es ist merkwürdig, daß $\mathfrak{F}$ mit allen Parallelflächen kongruent ist. Die Kongruenzen beider Scharen haben das Gemeinsame, daß sie aus den orthoiden Schraubenflächen (§ 6, b), zusammengesetzt werden können, deren Striktionslinien die Schraubenlinien der Schraubung $\mathfrak{S}$ sind. Dies ist die charakteristische geometrische Eigenschaft aller möglichen Zerlegungen des Gewindes in Normalenkongruenzen.

Wir bestätigen dies, indem wir eine allgemeine Kongruenz $\mathfrak{K}$ aufsuchen, die durch die Schraubung $\mathfrak{S}$ in sich selbst übergeführt wird. Wir fassen die Strahlen von $\mathfrak{K}$, für die der kürzeste Abstand von Z in der XZ-Ebene liegt, zu einer Regelfläche $\mathfrak{R}$ zusammen. Diese habe die Gleichungen:

$$v = 0\,, \quad w = \varphi(u)\,.$$

Durch die Schraubung $\mathfrak{S}$ wird $\mathfrak{R}$ in eine andere Regelfläche übergeführt, mit den Gleichungen:

$$v = v_0\,, \quad w = \varphi(u) + \mathfrak{k} v_0\,. \tag{167}$$

Wir erhalten also aus (158) folgende Parameterdarstellung von $\mathfrak{K}$:

$$\begin{cases} p_1 = \mathfrak{k}\sin v & p_4 = u^2\sin v + \mathfrak{k}(\varphi + \mathfrak{k} v)\cos v \\ p_2 = -\mathfrak{k}\cos v & p_5 = -u^2\cos v + \mathfrak{k}(\varphi + \mathfrak{k} v)\sin v \\ p_3 = u & p_6 = -\mathfrak{k} u\,. \end{cases} \tag{168}$$

Wir bilden für diese Kongruenz nach § 22 die Größen:

$$R = -\mathfrak{k}\,, \quad S = \tfrac{1}{2}\mathfrak{k}^2\varphi'\,, \quad T = \mathfrak{k}(u^2 + \mathfrak{k}^2)\,,$$
$$U = \mathfrak{k}^2\,, \quad W = 0\,, \quad V = \mathfrak{k}^2(u^2 + \mathfrak{k}^2)\,.$$

Das Kriterium für Normalenkongruenzen, nämlich (§ 30)

$$UT - 2WS + VR = 0$$

ist also erfüllt.

Satz 108: Gestattet eine Kongruenz, die in einem Gewinde enthalten ist, die Schraubung, durch die das Gewinde definiert werden kann, so ist sie eine Normalenkongruenz.

f) Die Pfaffsche Gleichung des Gewindes (155) lautet:

$$\mathfrak{k} z' + x y' - x' y = 0\,. \tag{169}$$

Nach der Regel des § 52, b) ist also

$$x\frac{\partial z}{\partial y} - y\frac{\partial z}{\partial x} - \mathfrak{k} = 0 \tag{170}$$

die partielle Differentialgleichung derjenigen Flächen, deren Normalen dem Gewinde angehören. Sie ist (nach Goursat, Part. Differentialgl. 1. Ordnung, § 18) dem simultanen System

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{\mathfrak{k}}$$

äquivalent, von dem

$$x^2 + y^2 = \text{const.}, \qquad z - \mathfrak{k} \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \text{const.}$$

zwei Integrale sind. Führen wir in den Normalebenen zur Achse die schon unter a) definierten Polarzeiger u, v ein, so können wir die Integralflächen von (170) in der Form

$$z - \mathfrak{k} v = \varphi(u),$$

wobei φ eine willkürliche Funktion ist, schreiben. Dies ist eine beliebige Schraubenfläche der Schraubung $\mathfrak{S}$, was mit (167) übereinstimmt.

Satz 109: Die Flächen, deren Normalen einem Gewinde angehören, sind nur die Schraubenflächen, die durch die definierende Schraubung des Gewindes erzeugt werden.

g) Um ein Beispiel zur Bestimmung der Komplexkurven einer Fläche zu bringen, nehmen wir eine Kugel mit dem Halbmesser R an, deren Mittelpunkt auf der Achse eines Gewindes liegen soll und wollen die Gewindekurven auf der Kugel suchen (Plücker, Neue Geom. S. 61, Anm.). Indem wir wie unter f) von dem gemischten Zeigersystem u, v, z Gebrauch machen, also

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v$$

in die Pfaffsche Gleichung des Gewindes (169) einführen, erhalten wir:

(171) $$\mathfrak{k} z' + u^2 v' = 0.$$

Die Gleichung der Kugel in diesen Zeigern lautet:

(172) $$u^2 + z^2 = R^2.$$

Wählen wir z zur unabhängigen Veränderlichen, so ergibt sich aus (171):

(173) $$dv = \frac{\mathfrak{k}\, dz}{z^2 - R^2},$$

(174) $$v = \frac{\mathfrak{k}}{2R} l \frac{R - z}{R + z} + \text{const.}$$

Diese Kurven sind Loxodromen; denn nennt man ds_1 und ds_2 die Projektionen des Bogenelementes einer sphärischen Kurve auf den durch seinen Anfangspunkt gehenden Parallelkreis, bzw. Meridian, so ist

$$ds_1 = u\, dv, \quad ds_2 = \frac{R}{u} dz.$$

Also ist die Differentialgleichung der Loxodromen, die die Meridiane unter dem Winkel ϑ schneiden:

$$\frac{R^2 - z^2}{R} \cdot \frac{dv}{dz} = \operatorname{tg} \vartheta \,.$$

Diese Gleichung wird nun mit (173) identisch, wenn man

$$\operatorname{tg} \vartheta = - \frac{\mathfrak{k}}{R}$$

setzt. Dabei ist $\tan \vartheta$ positiv, wenn z und v gleichzeitig wachsen.

h) Wir wollen alle parabolischen Kongruenzen eines Gewindes finden. Solche, die von der einen Schar der Haupttangenten einer Fläche gebildet werden, gibt es hier nicht (§ 52, c, d). Aber wir betrachten eine Kongruenz $\mathfrak{C}$, die aus denjenigen Gewindestrahlen besteht, die eine Kurve C treffen. Ist P ein Punkt der Kurve, t seine Tangente, ν seine Nullebene, so besteht $\mathfrak{C}$ aus den Strahlbüscheln (P, ν). Bewegt sich P auf C, so dreht sich ν in jedem Augenblick um die Gerade t', die t in der Korrelation des Nullsystems entspricht. Die Strahlen des Büschels (P, ν) sind also hyperbolisch, außer wenn t' mit t zusammenfällt, was nur für Komplexkurven überall der Fall ist (vgl. auch Aufg. 36).

Satz 110: Jede parabolische Kongruenz eines Gewindes besteht aus solchen Gewindestrahlen, die eine Gewindekurve treffen, d. h. aus den Büscheln (P, ν), wenn P ein Punkt, ν die zugehörige Schmiegungsebene der Gewindekurve ist.

§ 54. Oskulation der berührenden linearen Komplexe; Wenderichtungen.

Wir definieren (analog wie dies schon in den § 23 und 42 in besonderen Fällen geschah): Zwei Liniengebilde L_m und L_n von den Dimensionen m und n $(m \leqq n)$ berühren sich in*) einem Strahl q, wenn alle von q ausgehenden Richtungen des Linienraums, die in L_m vorkommen, auch in L_n enthalten sind. Daraus folgt sofort:

Satz 111: Berührt L_n ein zweites Gebilde L_m $(n \geqq m)$ in q, so berührt es auch alle Teilgebiete von L_m, die durch q gehen, in q.

*) Für zwei Regelflächen muß man, um dem gewöhnlichen Berührungsbegriff nicht zu widersprechen, sagen „längs“ q.

Sei durch

$$F(p_1, \ldots p_6) = 0 \tag{1}$$

ein Komplex n-ten Grades gegeben und L ein linearer Komplex, der F im regulären Strahle q berührt. Dann berührt L nach Satz 111 auch alle Regelflächen von F, die durch q gehen. Um für die Annäherung, mit der F durch L in der Umgebung des Strahles q in den verschiedenen Richtungen dargestellt werden kann, einen Maßstab zu gewinnen, gehen wir von folgender Überlegung aus: Zu jeder Regelfläche $\mathfrak{R}$ von F durch q gibt es berührende $\mathfrak{R}_1$ in L. Lassen wir daher einen Strahl p von q ausgehend die Fläche $\mathfrak{R}$ durchlaufen, so wird die Polare P von p bezüglich L, weil sie für Gewindestrahlen mit p zusammenfällt, bei der Bewegung auf $\mathfrak{R}$ in der Nähe von p bleiben. Das Moment zwischen p und P und die Ordnung seines Verschwindens beim Einrücken nach q wird einen Maßstab für die Annäherung geben, mit der $\mathfrak{R}$ durch $\mathfrak{R}_1$ ersetzt werden kann. Diesen Gedanken*) wollen wir jetzt rechnerisch verfolgen.

Zur Berechnung der Zeiger P_ν von P haben wir nach Bd. I, § 51 die Gleichung

$$AP_\nu = a_\nu \cdot \omega(a, p) - Ap_\nu \tag{175}$$

wobei für a_ν die Zeiger des Gewindes L zu setzen sind und

$$\omega(a, p) = \sum_1^6 a_{\nu+3} p_\nu , \qquad A = \sum_1^3 a_\nu a_{\nu+3} .$$

Zunächst berechnen wir das Moment M zwischen den Stäben**) P und p aus $M = \Sigma P_\nu p_{\nu+3}$, also

$$AM = [\omega(a, p)]^2 . \tag{176}$$

*) Er stammt, wie die Sätze 112—114 von Koenigs (Thèse, S. 109, f.), der dabei die vier unabhängigen Linienkoordinaten $u_1 \ldots u_4$ zugrunde legt, die in der Gleichung der Geraden auftreten, wenn man sie in der Form

$$x = (u_1 + iu_3)z + (-u_2 + iu_4) , \quad y = (u_2 + iu_4)z + (u_1 - iu_3)$$

schreibt. Es sind dieselben, die den ganzen Linienraum vierfach orthogonal zerlegen. Außerdem wird der betrachtete Strahl in die Z-Achse verlegt.

**) Jeder Länge des Stabes p ist durch (175) eine bestimmte Länge des Stabes P zugeordnet. Es kommt zwar auf diese Länge nicht an; aber es ist doch notwendig zu bemerken, daß die Stäbe endliche Längen haben und auch beim Grenzübergang behalten, weil nur dann die Ordnung des Verschwindens des Momentes für die Art und Weise, wie die Geraden zusammenrücken, charakteristisch ist.

Hier haben wir nach § 42

$$a_{\nu+3} = F_\nu + \lambda q_{\nu+3}\,, \qquad A = \sum_1^3 F_\nu F_{\nu+3}$$

zu setzen, ferner für p die Zeiger eines Strahles von $\mathfrak{R}$:

$$p_\nu = q_\nu + q'_\nu h + q''_\nu \frac{h^2}{2} + \cdots$$

Mit Rücksicht auf (§ 35)

$$(177) \qquad \sum_1^6 F_\nu q'_\nu = 0\,, \quad \sum_1^6 F_\nu q''_\nu = -\sum_1^6 \sum_1^6 F_{i\varkappa} q'_i q'_\varkappa$$

wird dann

$$(178) \quad \begin{cases} \omega(a\,,p) = -\dfrac{h^2}{2}(\Sigma F_{i\varkappa} q'_i q'_\varkappa + \lambda \Sigma q'_\nu q'_{\nu+3}) \\ \qquad\qquad + \dfrac{h^3}{6}(\Sigma F_\nu q'''_\nu - 3\lambda \Sigma q'_\nu q''_{\nu+3}) + \cdots \end{cases}$$

Wählen wir also sowohl die Richtung q' als auch den Wert λ, d. h. den berührenden Komplex willkürlich aus, so wird im allgemeinen das Moment von der vierten Ordnung unendlich klein, wenn p nach q einrückt, jedenfalls aber (auch in besonderen Fällen) von gerader Ordnung. Wir werden die betreffenden Sätze bequemer aussprechen, wenn wir aus § 14, Gleichungen (91) und (92) folgern: Die Regelfläche $p_\nu(t)$ und der Komplex a_ν berühren sich in q von der n-ten Ordnung, wenn der Koeffizient von h^n der letzte auf der rechten Seite von (178) ist, der verschwindet*). Eine Berührung zweiter Ordnung nennt man auch Oskulation.

Für jede nicht schneidende Richtung q' kann man einen Wert λ finden, der der Gleichung

$$(179) \qquad \Sigma F_{i\varkappa} q'_i q'_\varkappa + \lambda \Sigma q'_\nu q'_{\nu+3} = 0$$

genügt; also:

Satz 112: Eine Regelfläche durch einen regulären Strahl q eines Komplexes F, wird von einem linearen

*) Analog berühren sich eine Kurve und eine Ebene E von der n-ten Ordnung, wenn die Entwicklung des Abstandes eines Kurvenpunktes von E mit h^{n+1} beginnt und h die Bogenlänge ist. Die Größe $\omega(a\,,p)$ könnte man also der Analogie wegen als „Abstand" des Strahles p vom Komplex a_ν bezeichnen. Man könnte die Folgerung auch als Definition der Berührung n-ter Ordnung annehmen und die Definition des § 14 in einen Lehrsatz umformen.

Komplex L, der F in q berührt, im allgemeinen von der ersten Ordnung und nur von einem einzigen der Komplexe L von der zweiten Ordnung berührt.

Jeder Komplex muß diese Rolle für ∞^1 Richtungen spielen, die wir erhalten, wenn wir λ festhalten und (179) als Bedingung für die q' auffassen. Weil daneben die erste Gleichung (177) und

$$\Sigma q_\nu q'_{\nu+3} = 0$$

gilt, ferner eine Relation

$$\Sigma k_\nu q'_\nu = 0$$

mit willkürlichen k angenommen werden kann (§ 36, a), bleibt in der Tat für die Verhältnisse der q' nur eine einfache Mannigfaltigkeit übrig. Sie soll, weil (179) quadratisch ist, eine „quadratische Richtungsreihe" heißen; wir haben eben den Namen „Richtungsbüschel" für die linearen Richtungsreihen vorbehalten. Allerdings haben wir diese Definition an die Parameterdarstellung geknüpft. Würde man jedoch in (179) drei Parameter u, v, w einführen (vgl. den folgenden Paragraphen), so würde eine quadratische Gleichung in u', v', w' hervorgehen. Also wird wirklich die quadratische Richtungsreihe $\mathfrak{Q}$ durch einen Kegelschnitt, den wir auch $\mathfrak{Q}$ nennen, auf die Ebene E des § 47 abgebildet. Wir erhalten so neben dem in § 47 betrachteten Kegelschnittsbüschel $\mathfrak{B}$ noch ein zweites Büschel $\mathfrak{Q}$ mit der Gleichung (179). Der Kegelschnitt $\mathfrak{Z}$ der schneidenden Richtungen gehört beiden Büscheln an; denn er ist hier nach Satz 3 durch

$$\Sigma q' q'_{i, i+3} = 0 \tag{180}$$

dargestellt. Die Grundpunkte des Büschels $\mathfrak{Q}$ sind die Schnittpunkte von (180) mit

$$\Sigma F_{i\varkappa} q'_i q'_\varkappa = 0\,. \tag{181}$$

Dieser Kegelschnitt (181) hat im allgemeinen keine besondere Lage gegen $\mathfrak{Z}$, weshalb das Büschel $\mathfrak{Q}$ nicht, wie es bei $\mathfrak{B}$ der Fall war, immer von einer bestimmten besonderen Art ist.

Satz 113: Für jeden berührenden linearen Komplex L des Strahles q gibt es eine quadratische Reihe von Richtungen, deren Regelflächen von L oskuliert werden*).

*) Daß hier schon durch die Ableitungen q' erster Ordnung eine Eigenschaft zweiter Ordnung der Regelflächen bedingt wird, braucht nicht zu überraschen. Ein Analogon im Punktraum ist:

Wir betrachten nun das Schmiegungshyperboloid einer Regelfläche $\mathfrak{R}$ von F durch q. Nach § 14 berührt jeder lineare Komplex, der es enthält, $\mathfrak{R}$ von der zweiten Ordnung und umgekehrt: ein solcher Komplex enthält es ganz. Dies gilt insbesondere auch von dem nach Satz 112 eindeutig bestimmten Komplexe L, der außerdem für die Regelflächen von ∞^1 anderen Richtungen (Satz 113) die Schmiegungshyperboloide enthält. Diese treten aber schon für eine einzelne Richtung in der Zahl ∞^2 auf, da man zur Bestimmung eines solchen noch einen Strahl braucht, den man auf ∞^2 Arten unter den Nachbarstrahlen von q in F wählen kann. Daher:

Satz 114: Jeder berührende lineare Komplex L ist der geometrische Ort für die Schmiegungshyperboloide aller Regelscharen von F, die von L oskuliert werden.

Um die geometrische Bedeutung der Grundpunkte des Büschels Ω zu zeigen, schicken wir einen Hilfssatz voraus: Wir legen die Z-Achse eines rechtwinkligen Systems in den Strahl q und betrachten den Komplexkegel K des Ursprungs, dessen Berührungsebene längs q die XZ-Ebene sei. Wenn wir dann K durch Einheitsstäbe darstellen und die Bogenlänge der sphärischen Abbildung als Parameter t nehmen, können wir setzen*)

$$p_1 = t + a\,t^2 + \ldots$$
$$p_2 = b\,t^2 + \ldots \qquad p_4 = p_5 = p_6 = 0\,.$$
$$p_3 = 1 - \tfrac{1}{2}\,t^2 + \ldots$$

Ein Strahlengewinde L, für das der Ursprung und die XZ-Ebene als Nullpunkt und Nullebene zusammengehören, hat die Gleichung

$$a_5\,p_2 + a_1\,p_4 + a_2\,p_5 + a_3\,p_6 = 0\,,$$

Eine Berührungsebene B einer Fläche im Punkte P berührt die Kurven auf der Fläche, die durch P gehen, im allgemeinen von der ersten Ordnung, jedoch die Kurven, die eine Haupttangente berühren, von der zweiten Ordnung. Auch hier kann also bloß dadurch, daß wir der Kurve eine Richtung vorschreiben, eine Berührung höherer Ordnung mit B erzielt werden.

*) Für Rückkehrstrahlen würde diese Darstellung versagen; solche sind aber ohnehin ausgeschlossen, da q als regulärer Strahl vorausgesetzt wurde.

wobei a_5 und a_2 nicht verschwinden, weil sonst die Invariante verschwände. Also wird

$$\omega(a, p) = a_5 b t^2 + \dots .$$

Wenn also K und L sich von höherer als erster Ordnung berühren, muß $b = 0$ sein. Dann hat K in q im allgemeinen einen Wendestrahl. Betrachten wir anderseits die Komplexkurve C in der XZ-Ebene und nehmen ihre Bogenlänge als Parameter t, so wird die Darstellung, soweit wir sie benötigen:

$$p_2 = p_4 = p_6 = 0 , \quad p_5 = c t^2 + \dots ,$$

also

$$\omega(a, p) = a_2 c t^2 + \dots .$$

Wenn also C und L sich von höherer als erster Ordnung berühren, muß $c = 0$ sein und es wird

$$p_5 = \varkappa t^3 + \dots ,$$

d. h. die Tangente der Komplexkurve wird vor und nach dem Durchgang durch die Z-Achse die Y-Achse auf verschiedenen Seiten kreuzen. Da Wendepunkte bei regulären Strahlen ausgeschlossen sind, folgt, daß C in q eine Rückkehrtangente hat, wie man übrigens auch aus der Dualität zum früheren Vorkommnis schließen kann.

Die erwähnten Grundpunkte $V_1, \dots V_4$ des Büschels $\mathfrak{L}$ definieren nun vier schneidende Richtungen, deren Regelflächen von jedem Komplex des Büschels L oskuliert werden. Betrachten wir als solche Regelflächen insbesondere den Komplexkegel des Kuspidalpunktes und die Komplexkurve der Kuspidalebene, die zu einer solchen Richtung gehören, so treten die eben gemachten Schlüsse in Kraft und wir erhalten (Voß, Math. Ann. Bd. IX) den

Satz 115: Auf jedem regulären Strahl q gibt es (unabhängig vom Grade des Komplexes) vier Punkte W, für deren Komplexkegel q ein Wendestrahl ist und vier Ebenen σ, für deren Komplexkurven q eine Spitzentangente ist. Die Ebenen σ entsprechen in der Hauptkorrelation den Punkten W.

Die vier schneidenden Richtungen $V_1, \dots V_4$ nennen wir Wenderichtungen; folgt man ihnen fortwährend, so erhält man ausgezeichnete abwickelbare Flächen des Komplexes, die „Wendeflächen".

§ 55. Die Hauptrichtungen, Hauptflächen und Hauptkomplexe.

Das Kegelschnittsbüschel $\mathfrak{Q}$ des vorigen Paragraphen in der Ebene E (§ 47) hat drei zerfallende Kegelschnitte, deren Scheitel H_1, H_2, H_3 die Diagonalpunkte des vollständigen Vierecks sind, das durch die Bilder $V_1, \ldots V_4$ der Wenderichtungen bestimmt wird. Da H_1, H_2, H_3 das gemeinsame Polardreieck des Büschels $\mathfrak{Q}$ ist, dem auch der Kegelschnitt $\mathfrak{Z}$ der schneidenden Richtungen angehört, stehen je zwei Richtungen H zueinander senkrecht. Sie heißen die Hauptrichtungen*), die Flächen, die aus ihrer Verfolgung entstehen, Hauptflächen und die Komplexe, die in den Hauptrichtungen nach Satz 112 oskulieren, Hauptkomplexe.

Wir wollen zuerst die Berechnung der Hauptkomplexe vornehmen und dann die geometrische Bedeutung der neuen Begriffe aufsuchen. Wenn man die Gleichung (3) des § 35 differenziert oder dort den Koeffizienten von h^3 Null setzt, erhält man:

$$\Sigma F_i q_i''' + 3\Sigma F_{ik} q_i' q_k'' + \Sigma F_{ikl} q_i' q_k' q_l' = 0 .$$

Mit Hilfe dieser Gleichung kann man (178) schreiben:

$$\omega(a, p) = -\frac{h^2}{2}\Psi - \frac{h^3}{6}\Psi_1 + \ldots ,$$

wobei

$$\Psi = \Sigma F_{ik} q_i' q_k' + \lambda \Sigma q_i' q_{i+3}' \tag{182}$$

$$\Psi_1 = \Sigma F_{ikl} q_i' q_k' q_l' + 3(\Sigma F_{ik} q_i' q_k'' + \lambda \Sigma q_i' q_{i+3}'') . \tag{183}$$

Wir setzen nun voraus, es sei auch eine Parameterdarstellung**) des Komplexes bekannt:

$$q_i = f_i(u_1, u_2, u_3) , \tag{184}$$

also:

$$q_i' = \sum_\mu f_{i\mu} u_\mu' \quad , \quad q_i'' = \sum_\mu f_{i\mu} u_\mu'' + \sum_{\mu,\nu} f_{i\mu\nu} u_\mu' u_\nu' .$$

Führen wir dies in (182) ein, so erhalten wir:

$$\Psi = \Sigma F_{ik} f_{i\mu} f_{k\nu} u_\mu' u_\nu' + \lambda \Sigma f_{i\mu} f_{i+3,\nu} u_\mu' u_\nu' , \tag{185}$$

*) Sie wurden von Klein, Math. Ann. Bd. V. S. 271 (in etwas anderer Weise) eingeführt.

**) Die Ableitung der analogen Gleichung für die homogene Darstellung findet sich bei Jessop, Line Complex, Art. 132.

wobei [wie auch bei (187)] in den Summen alle lateinischen Marken die Werte 1, ... 6, alle griechischen die Werte 1, 2, 3 unabhängig voneinander durchlaufen. Ψ ist eine homogene quadratische Form in den u'. Setzt man ihre Determinante Null, so erhält man eine kubische Gleichung in λ zur Bestimmung der Hauptkomplexe. Für eine Wurzel λ_1 zerfällt Ψ in zwei lineare Faktoren, deren Schnitt, wenn man sie Null setzt, die Zeiger der zugehörigen Hauptrichtung gibt:

$$u' : v' : w' = U_1 : V_1 : W_1 .$$

Die Bestimmung der Hauptflächen kommt dann auf die Integration des simultanen Systems

$$\frac{du}{U_1} = \frac{dv}{V_1} = \frac{dw}{W_1} \tag{186}$$

(und zweier analogen Systeme) hinaus. Um nun den Satz (116) zu beweisen, müssen wir auch in (183) die u einführen. Wir erhalten:

$$\left\{\begin{aligned} \Psi_1 &= \Sigma F_{ikl} f_{i\mu} f_{k\nu} f_{l\varrho} u'_\mu u'_\nu u'_\varrho \\ &\quad + 3\,\Sigma(F_{ik} f_{i\mu} f_{k\nu} + \lambda f_{i\mu} f_{i+3,\nu}) u'_\mu u''_\nu \\ &\quad + 3\,\Sigma(F_{ik} f_{i\mu} f_{k\nu\varrho} + \lambda f_{i\mu} f_{i+3,\nu\varrho}) u'_\mu u'_\nu u'_\varrho . \end{aligned}\right. \tag{187}$$

Wir bilden nun $\dfrac{d\Psi}{dt}$ aus (185) und müssen dabei die u und die u' als Funktionen von t betrachten. Aber denjenigen Teil des Ergebnisses, den wir erhalten, wenn wir die F_{ik} dabei als konstant betrachten, bezeichnen wir mit $\left[\dfrac{d\Psi}{dt}\right]$. Dann ergibt sich durch Vergleich mit (187) die Identität:

$$\Psi_1 = \frac{d\Psi}{dt} + \tfrac{1}{2}\left[\frac{d\Psi}{dt}\right]. \tag{188}$$

Setzen wir nun λ_1 für λ, so zerfalle Ψ in die zwei Faktoren:

$$\varphi_1 = \Sigma a_\nu u'_\nu , \quad \varphi_2 = \Sigma b_\nu u'_\nu ,$$

wobei die a und b Funktionen der F_{ik}, $f_{i\nu}$ sind. Also ist

$$\frac{d\Psi}{dt} = \varphi_1 \frac{d\varphi_2}{dt} + \varphi_2 \frac{d\varphi_1}{dt} , \quad \left[\frac{d\Psi}{dt}\right] = \varphi_1 \left[\frac{d\varphi_2}{dt}\right] + \varphi_2 \left[\frac{d\varphi_1}{dt}\right].$$

Nun verschwindet für die zu λ_1 gehörige Hauptrichtung sowohl φ_1 als φ_2, also nach (188) auch Ψ_1. Daraus folgt:

Satz 116: Die Hauptrichtungen sind solche Richtungen, deren Regelflächen vom zugehörigen oskulierenden Gewinde des Büschels L zugleich von der dritten Ordnung berührt werden.

Nun erinnern wir uns (§ 14), daß ein Gewinde, das eine Regelfläche von der dritten Ordnung berührt, durch vier benachbarte Strahlen und nachherigen Grenzübergang erhalten werden kann. Diese vier Strahlen kann man zuerst zu je zweien zusammenrücken lassen und kommt so zur Vorstellung, als ob ein Hauptkomplex die zugehörige Hauptfläche in zwei benachbarten Strahlen berühren würde („stationäre Berührung"). Analog kann ja ein Undulationspunkt einer Kurve durch das Zusammenrücken der Berührungspunkte einer Doppeltangente entstehen. Dies war der Ausgangspunkt für die erste Einführung (Klein, a. a. O.) und Berechnung (Voß, Math. Ann. Bd. IX) der Hauptkomplexe.

Bestimmt man die Schnittpunkte der Geraden $\varphi_1 = 0$ und $\varphi_2 = 0$ mit dem Kegelschnitt $\mathfrak{Z}$ der schneidenden Richtungen (§ 47), so gelangt man zur Kenntnis der Wenderichtungen und hierauf durch Integration von vier analogen Systemen wie (186) zur Kenntnis der Wendeflächen.

Die Hauptrichtungen stehen zwar überall zueinander senkrecht; dies verbürgt aber noch keineswegs eine dreifach orthogonale Zerlegung des Komplexes. Ist vielmehr $U_2 : V_2 : W_2$ eine zweite Hauptrichtung, so kann man die Gleichung des verbindenden Richtungsbüschels in Determinantenform aufschreiben. Ob die Gesamtheit der so definierten Richtungen durch ihre Verfolgung überhaupt zu einer Kongruenz führt, hängt davon ab, ob die entsprechende totale Differentialgleichung

$$\begin{vmatrix} du & dv & dw \\ U_1 & V_1 & W_1 \\ U_2 & V_2 & W_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{189}$$

integrabel ist (vgl. § 49, a), wo zum erstenmal eine ähnliche Frage auftrat). Solcher Gleichungen gibt es noch zwei analoge. Die Integrabilität aller drei ist die Bedingung dafür*), daß die Hauptflächen eine dreifach orthogonale Zerlegung des Komplexes mit sich bringen.

*) Damit ist nicht gesagt, daß diese drei Bedingungen voneinander unabhängig seien.

§ 56. Polarkomplexe.

Wenn in Kleinschen Zeigern eine Komplexgleichung n-ten Grades

$$F(x_1, \ldots x_6) = F(x) = 0 \tag{190}$$

gegeben ist und man setzt $x + \lambda y$ statt x in die linke Seite ein, so erhält man

$$F(x+\lambda y) = F(x) + \lambda \Delta F + \frac{\lambda^2}{2}\Delta^2 F + \ldots + \frac{\lambda^n}{n!}\Delta^n F, \tag{191}$$

wobei

$$\Delta F = \Sigma F_i y_i\,, \quad \Delta^2 F = \Sigma F_{ik} y_i y_k\,, \ldots .$$

Wenn man (190) in der Form

$$F + MX = 0$$

geschrieben denkt, wobei M eine homogene Funktion $n-2$-ten Grades ist und

$$X = \Sigma x_\lambda^2\,,$$

so kommt in der entsprechenden allgemeineren Entwicklung noch hinzu:

$$X(x+\lambda y)\cdot M(x+\lambda y) = 2\lambda \Sigma x_k y_k \cdot \left[M(x) + \lambda \Delta M + \frac{\lambda^2}{2}\Delta^2 M + \ldots \right].$$

Also ist der Koeffizient P_m von λ^m:

$$P_m = \frac{1}{m!}\Delta^m F + \frac{2\Sigma x_k y_k}{(m-1)!}\Delta^{m-1} M\,. \tag{192}$$

Setzt man $P_m = 0$, so erhält man die Gleichung eines Komplexes m-ten Grades, des „m-ten Polarkomplexes“ von x bezüglich F (Voß, Math. Ann. X.)*). Dabei können die x die Zeiger einer beliebigen Geraden, ja eines beliebigen linearen Komplexes bedeuten. Aber meist beschränkt man sich auf den Fall, daß x eine Gerade ist und auf die Be-

*) Insbesondere heißt also die Gleichung der ersten Polarkomplexe

$$\Sigma(F_i + 2x_i M) y_i = 0\,. \tag{193}$$

Da für bestimmte Werte x das M eine Konstante wird, so gibt es einfach unendlich viele erste Polarkomplexe, die, im Falle daß x ein Strahl von F ist, in die uns schon bekannten Tangentialkomplexe (§ 42) übergehen. Andere Autoren (Pasch, J. f. M. Bd. 76) nennen (192) den $n-m$-ten Polarkomplex.

trachtung derjenigen Strahlen der Polarkomplexe, die x schneiden. Hierfür ist

$$\Sigma x_k y_k = 0$$

die Bedingung. Also sind die x schneidenden Strahlen allen Polarkomplexen desselben Grades gemeinsam, so daß man bei der Entwicklung (191) stehen bleiben kann, die auch für Plückersche Zeiger gilt.

Wir setzen nun voraus, x und y seien Strahlen, die sich schneiden; dann gibt die Gleichung

$$F(x + \lambda y) = 0 \tag{194}$$

die n Strahlen des Büschels (x, y), die dem Komplex F angehören. Ist insbesondere x ein Strahl von F und auch $\Delta F = 0$, so verschwindet noch eine zweite Wurzel λ. Die Gleichung

$$\Sigma F_i y_i = 0$$

ist also die Bedingung dafür, daß die Ebene $(x, y) \equiv E$ den Komplexkegel des Punktes $(x, y) \equiv P$ berührt. Da sie einen linearen Komplex darstellt, dem auch x angehört, erhalten wir nochmals den Satz 76.

Sei wieder x ein Strahl von F; dann gehört er wegen des Satzes über homogene Funktionen auch allen Polarkomplexen an. Ist ferner y zugleich ein Strahl des ersten und zweiten Polarkomplexes, so rückt ein dritter Strahl des Büschels $x + \lambda y$ nach x hinein und x ist ein Wendestrahl für den Komplexkegel von P. Die Bedingung hierfür ist das gleichzeitige Bestehen der Gleichungen

$$\Sigma x_i y_i = 0\,, \quad \Sigma F_i y_i = 0\,, \quad \Sigma F_{ik} y_i y_k = 0\,, \quad \Sigma y_i^2 = 0\,. \tag{195}$$

Sie stellen eine Regelfläche vierter Ordnung dar, die aber der Natur der Sache nach in eine Anzahl von Strahlbüscheln zerfallen muß, weil sonst x für alle seine Komplexkegel Wendestrahl wäre. Wir erhalten so den Satz 115 wieder. Für den Scheitel eines solchen Strahlbüschels muß der Komplexkegel des zweiten Polarkomplexes in zwei Strahlbüschel zerfallen.

Punkte, für deren Kegel x ein Undulationsstrahl ist (dessen Berührungsebene den Kegel von der dritten Ordnung berührt), wird es auf einem beliebigen Komplexstrahl x nicht geben. Diese Strahlen werden vielmehr nur eine Kongruenz bilden und die Strahlen, deren Ebenen einen ihrer Komplexkegel von der vierten Ordnung berühren, nur eine Regelfläche.

Wenn x ein singulärer Strahl von F ist, so erfüllt er auch die Gleichung

$$\Sigma F_i^2 = \Phi = 0 . \tag{196}$$

Dann kann man (§ 39) die F_i als Zeiger ξ_i einer Geraden ξ auffassen, die x im zugeordneten singulären Punkt S schneidet. Legen wir also durch S eine beliebige Gerade y, so wird

$$F(x + \lambda y) = \frac{\lambda^2}{2} \Sigma F_{ik} y_i y_k + \dots .$$

Dies zeigt nochmals (Satz 77), daß mindestens zwei Strahlen des Büschels (x, y) nach x fallen, also x ein Doppelstrahl des Kegels von S ist. Wählen wir jedoch y auf dem Komplexkegel K, den der zweite Polarkomplex P_2 in S hat, so wird auch

$$\Sigma F_{ik} y_i y_k = 0 \tag{197}$$

und es rückt ein dritter Strahl des Büschels nach x; d. h. die Ebene x, y berührt den Komplexkegel $\mathfrak{K}$ von F. Also muß K in die zwei Berührungsebenen zerfallen, die $\mathfrak{K}$ längs x hat.

Der Komplex (196) definiert auf x im allgemeinen eine Korrelation, in der dem Punkte S eine bestimmte Ebene ε entspricht, dieselbe wie im linearen Komplex

$$\Sigma \Phi_k z_k = 0 . \tag{198}$$

Nach § 40 ist ε neben der singulären Ebene σ die zweite Brennebene von s in der Singularitätenkongruenz; dual wurde dort der zweite Brennpunkt Q bestimmt. Nun beweisen wir (Pasch, a. a. O. § 3 und Voß, a. a. O. S. 80) den

Satz 117: Die Brennebenen σ, ε der Singularitätenkongruenz, die durch einen singulären Komplexstrahl x gehen, sind durch die beiden Berührungsebenen β_1, β_2 des Komplexkegels des singulären Punktes S von x harmonisch getrennt; ebenso die Brennpunkte S, Q derselben Kongruenz durch die beiden Berührungspunkte der Komplexkurve in der singulären Ebene σ durch x.

Sei nämlich z ein Strahl in der Ebene ε und durch S. Dann bestimmen wir die Strahlen des Büschels $\xi + \mu z$, die in den Ebenen β_1, β_2 liegen, aus der Gleichung (197):

$$\Sigma F_{ik} \xi_i \xi_k + 2\mu \Sigma F_{ik} \xi_i z_k + \mu^2 \Sigma F_{ik} z_i z_k = 0 . \tag{199}$$

Nun ist

$$2\sum_i F_{ik}\,\xi_i = 2\sum F_{ik}\,F_i = \Phi_k\,.$$

Also verschwindet zufolge (198) das mittlere Glied in (199). Da nun ξ in σ liegt und die beiden Schnittstrahlen des Büschels $\xi + \mu z$ mit β_1, β_2 die Form $\xi \pm \mu z$ haben, folgt der Satz 117.

Man sieht daraus, daß Kontinuitätsbetrachtungen zu Trugschlüssen verleiten können. Wir sahen nämlich in § 39 (Satz 78), daß, wenn man einen Punkt P auf dem

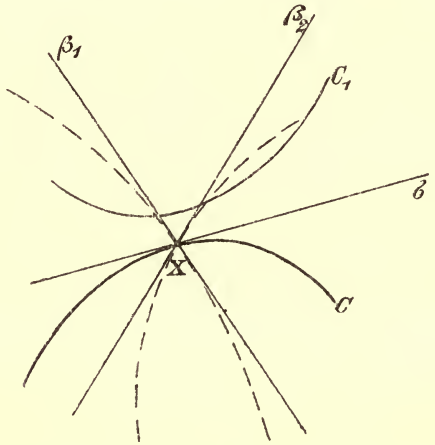

Fig. 20.

singulären Strahl x verschiebt, die Berührungsebene seines Komplexkegels immer σ bleibt. Rückt nun P nach S ein, so läge die Vermutung nahe, daß σ eine der beiden Berührungsebenen im nunmehrigen Doppelstrahl x bleibt, während noch ein anderer Teil der Kegelfläche sich x nähert. Dies würde aber dem Satz 117 widersprechen. Wie vollzieht sich also tatsächlich der Übergang? Wir werden die räumlichen Gebilde durch einen Schnitt mit einer Bildebene zur Anschauung bringen und die Spuren mit denselben Buchstaben wie die räumlichen Gebilde selbst bezeichnen. Die Schnittkurve C mit dem Komplexkegel wird (Fig. 20) σ stets in x berühren. Aber die Krümmung im Berührungspunkt

wird immer stärker werden. Zugleich rückt ein anderer Teil C_1 derselben Kurve in die Nähe und vereinigt sich mit C in dem Augenblick zur punktierten Kurve, wo P nach S einrückt. Es hat nun nichts Paradoxes mehr an sich, daß die Tangenten des Doppelpunktes beide von σ verschieden sind. Man denke nur an den Fall der Komplexe zweiten Grades, wo zwei Hyperbeläste zusammenrücken (Fig. 21), deren einer die feste Gerade σ im festen Punkte x berührt. Während der Mittelpunkt der Hyperbel in x einrückt, kann diese in zwei beliebige Gerade durch x zerfallen. Über duale Übergänge vgl. Clebsch-Lindemann, Bd. I, S. 346.

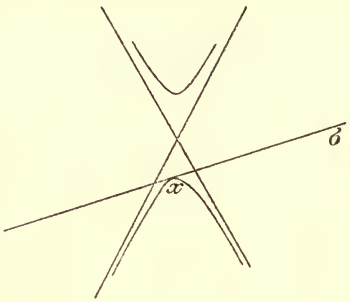

Fig. 21.

---

§ 57. Die Doppelstrahlen.

Wir nehmen an, ein Komplex habe in q einen höheren singulären Strahl und seine Gleichung sei so geschrieben (Satz 74), daß alle F_i für q verschwinden:

$$F(p_1, \ldots p_6) = F(p) = 0 . \tag{1}$$

Wir schreiben dann analog wie in § 38 die Gleichung des Komplexkegels eines Punktes x von q in den laufenden Zeigern y auf:

$$F(x_1 y_2 - x_2 y_1, \ldots) = 0 .$$

Es ist

$$\frac{\partial F}{\partial y_\lambda} = \sum_{i=1}^{6} F_i \frac{\partial p_i}{\partial y_\lambda} ,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y_\lambda \partial y_\mu} = \sum_{i,k} F_{ik} \frac{\partial p_i}{\partial y_\lambda} \frac{\partial p_k}{\partial y_\mu} , \tag{200}$$

. . . . . .

Daraus sieht man: Wenn etwa für q auch noch alle partiellen Ableitungen F_{ik} von der zweiten, ferner alle F_{ikl} von

der dritten Ordnung ... verschwinden, so verschwinden auch alle partiellen Ableitungen von F nach den y mindestens bis zu derselben Ordnung, etwa bis einschließlich zur $m-1$-ten (dann heiße q ein „m-facher Strahl“) und zwar für jeden Punkt des Strahles q, wo auch der Scheitel x des Komplexkegels auf q gewählt worden sein mag. Die Entwicklung der Gleichung des Kegels in der Umgebung eines solchen Punktes y beginnt dann mit den Gliedern m-ter Ordnung, also:

Satz 118: Ein m-facher Komplexstrahl ist auch für den Komplexkegel jedes seiner Punkte im allgemeinen (mindestens) ein m-facher Strahl.

Wir befassen uns nur mit den zweifachen Strahlen, die Doppelstrahlen heißen. Einem Punkte eines Doppelstrahles sind die zwei Berührungsebenen des Komplexkegels und einer Ebene durch ihn die zwei Berührungspunkte der Komplexkurve zugeordnet. Also ist auf ihm eine Korrespondenz (2, 2) definiert. Wir wollen ein Verfahren angeben, in jedem konkreten Fall die Korrespondenzgleichung wirklich herzustellen. Wir nehmen an, man habe das Zeigersystem so transformiert, daß die Z-Achse in den Doppelstrahl q fällt. Dann beginnt, wie auch vorher, die Entwicklung der Gleichung des Komplexkegels mit den Gliedern

$$\sum \frac{\partial^2 F}{\partial y_\lambda \partial y_\mu} y_\lambda y_\mu . \tag{201}$$

Diese werden, Null gesetzt, das Paar der Berührungsebenen in einem Punkte der Z-Achse geben müssen. Nun vereinfacht sich das Schema (20) in § 38, wenn wir rechtwinklige Zeiger 1, x, y, z statt $x_1, \ldots, x_4$ setzen, die Symbole y vorläufig beibehalten und bedenken, daß für die Z-Achse $x = y = 0$ wird:

(20a)

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
y_1	0	0	$-z$	0	0	0
y_2	1	0	0	0	z	0
y_3	0	1	0	$-z$	0	0
y_4	0	0	1	0	0	0

Wir setzen

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y_\lambda \partial y_\mu} = (\lambda, \mu)$$

und können nun aus (200) und (20a) alle zehn Größen (λ, μ) zusammenstellen. Wir brauchen aber nur die folgenden drei:

$$(202) \quad \begin{cases} (2, 2) = F_{11} + 2F_{15}z + F_{55}z^2 \\ (3, 3) = F_{22} - 2F_{24}z + F_{44}z^2 \\ (2, 3) = F_{12} + (F_{25} - F_{14})z - F_{45}z^2 . \end{cases}$$

Denn wenn wir nun $y_1, \ldots, y_4$ durch $1, \xi, \eta, \zeta$ ersetzen, so muß für jeden Wert ζ eine in ξ, η homogene Gleichung zum Vorschein kommen, die das Ebenenpaar darstellt. Also müssen alle übrigen Symbole (λ, μ) verschwinden. Dies läßt sich auch unmittelbar bestätigen: Denn wie ein Blick auf das Schema (20a) lehrt, kommen in den übrigen Größen (λ, μ) rechts als Koeffizienten nur solche Symbole F_{ik} vor, die eine Marke drei haben. Es läßt sich nun zeigen, daß alle diese für q verschwinden. Denn alle F_k verschwinden, wenn man die Zeiger der Z-Achse

$$(203) \qquad 0, \ 0, \ 1; \quad 0, \ 0, \ 0$$

einsetzt. Also enthält F nur Glieder, die von den fünf Faktoren q_1, q_2, q_4, q_5, q_6 mindestens zwei (eventuell gleiche) enthalten. Diese beiden Faktoren bleiben bei der Bildung von F_3 erhalten, wenn das betreffende Glied nicht überhaupt wegfällt; also bleibt bei der Bildung von F_{3k} mindestens einer von ihnen. Also verschwinden alle F_{3k} für die Werte (203).

Wir haben daher im ganzen zur Aufstellung der Korrespondenzgleichung für den Doppelstrahl q folgende Regel: Man verlege die Z-Achse nach q, schreibe dann die Gleichung des Komplexes so, daß alle F_i für q verschwinden. Die Beziehung zwischen den Punkten z der Z-Achse und den zugehörigen Berührungsebenen, die den Winkel ϑ mit der XZ-Ebene bilden mögen, wird nun, wenn man

$$\frac{\eta}{\xi} = \operatorname{tg}\vartheta = u$$

setzt:

$$(204) \quad \begin{aligned} &[F_{22} - 2F_{24}z + F_{44}z^2]u^2 + 2[F_{12} + (F_{25} - F_{14})z - F_{45}z^2]u \\ &\quad + [F_{11} + 2F_{15}z + F_{55}z^2] = 0 . \end{aligned}$$

Dabei sind in die Symbole F die Werte (203) als Argumente einzusetzen. Setzt man die Diskriminante dieser Gleichung Null

$$(205) \qquad (2,2)(3,3) - (2,3)^2 = 0,$$

so gibt diese Gleichung vierten Grades in z die „Verzweigungspunkte" der Korrespondenz, für deren Komplexkegel die beiden Berührungsebenen zusammenfallen.

Satz 119: Es gibt im allgemeinen vier Punkte auf einem Doppelstrahl q, für deren Komplexkegel q ein Rückkehrstrahl ist.

Wenn Wurzeln der Gleichung (205) zusammenrücken, überhaupt durch besondere Eigenschaften der Korrespondenz (2, 2), entstehen zahlreiche besondere Arten von Doppelstrahlen, deren Untersuchung vor allem von der Theorie der Korrespondenz (2, 2) abhängt. Über diese vgl. Sturm, Liniengeometrie, I. Wir lassen uns auf diese Unterscheidungen nicht ein, sondern wollen nur noch andeuten, wie man die Beziehung zwischen den Richtungszeigern z, α, P ableiten kann, die für einen Doppelstrahl an Stelle der Gleichung (33) in § 41 tritt oder vielmehr an Stelle der für eine allgemeinere Lage geltenden Gleichung

$$P = (z - z_0)\,\mathrm{tg}(\alpha - \alpha_0) - m.$$

Man setze in die aus den Gliedern niedrigster Dimension gebildete Gleichung

$$(206) \qquad \Sigma F_{ik} q_i q_k = 0$$

die Werte (10) aus § 18 ein, wobei aber, da alle F_{3k} Null sind, der Wert q_3 nicht in Betracht kommt. Weil für den folgenden Grenzübergang die Art, wie α und z in der so entstehenden Gleichung auftreten, gleichgültig ist, bemerken wir bloß, was man ohne Rechnung sieht, daß in allen Gliedern einer der folgenden Faktoren vorkommt:

$$\sin^2\omega, \quad a\sin\omega\cos\omega, \quad a^2\cos^2\omega;$$
$$a\sin^2\omega, \quad a^2\sin\omega\cos\omega, \quad a^2\sin^2\omega.$$

Dividiert man also durch $\sin^2\omega$ und geht dann zur Grenze über, wobei

$$\lim\frac{a}{\omega} = P$$

wird, so treten an Stelle dieser Faktoren die folgenden:

$$1, \quad P, \quad P^2;$$
$$0, \quad 0, \quad 0;$$

und man erhält in der Tat eine Beziehung zwischen z, α, P allein, von der die Korrespondenzgleichung (204) nur ein besonderer Fall ist ($P = 0$)*). Man sieht, daß man $q_6 = 0$ hätte annehmen können und daß dann der Grenzübergang dasselbe Ergebnis hat, als ob man von vornherein

$$\cos\omega = 1, \quad \sin\omega = 1, \quad a = P$$

gesetzt hätte.

Man hat also zur Bestimmung der Richtungen, die von einem Doppelstrahl q ausgehen, folgendes Verfahren: Man mache q zur Z-Achse, sorge dafür, daß für diese alle F_i verschwinden und setze in (206), wo jetzt die F_{ik} konstant sind und i, k nur die Werte 1, 2, 4, 5 durchlaufen, ein:

$$(207) \quad \begin{cases} q_1 = \sin\alpha, & q_4 = z\cos\alpha + P\sin\alpha, \\ q_2 = -\cos\alpha, & q_5 = z\sin\alpha - P\cos\alpha. \end{cases}$$

Dann hat man die gesuchte Beziehung zwischen den Richtungszeigern z, α, P. Für besondere Fragen vereinfacht sich die Rechnung. Sucht man z. B. die Beziehung zwischen den Richtungen aller Regelflächen durch q mit gemeinsamem Zentralpunkt, so kann man voraussetzen, dieser falle in den Ursprung. Denn das Zeigersystem hat keine anderen Besonderheiten, als daß die Z-Achse in den Doppelstrahl fällt. Der Homogeneität wegen kann man nun in (206) einsetzen:

$$q_1 = 1, \qquad q_4 = P,$$
$$q_2 = -\cot\alpha, \qquad q_5 = -P\cot\alpha.$$

Übungsaufgaben:

37. Zu zeigen, daß die Gleichungen (21) sich nicht ändern, wenn man statt der F_i die entsprechenden Größen eines anderen berührenden linearen Komplexes einsetzt.

38. Die Umgebungen zweier Strahlen mit entgegengesetzt gleicher Umgebungsgröße sind symmetrisch.

39. Welche Gleichung tritt an Stelle von (33) in § 41, wenn die Lage des Zeigersystems gegen das Gewinde keine

*) Man setze in (204) $u = -\cot\alpha$.

andere Besonderheit aufweist, als daß die Z-Achse ein Gewindestrahl ist?

40. Wie zerlegt sich ein Komplex darnach in Kongruenzen, daß für alle Strahlen einer solchen Kongruenz die Normalform des § 42 gemeinsam ist?

41. Es ist zu zeigen, daß die Determinante $|N_{ik}|$ [Gleichungen (94)] verschwindet.

42. Wie kann Satz 95 anders bewiesen werden?

43. In § 48 sind nur die Kurven $P = \text{const.}$ untersucht, die zum Kegelschnittsbüschel $\mathfrak{B}$ führten. Es sind analog die Kurven $z = \text{const.}$ und $\alpha = \text{const.}$, die den beiden anderen natürlichen Richtungszeigern entsprechen, zu suchen.

44. Die hauptsächlichsten ausgezeichneten Richtungen in der Umgebung eines Gewindestrahles sind auf mehr geometrischem Wege als in § 53, c) aufzusuchen.

45. Es ist zu prüfen, ob die Kongruenzen $w = \text{const.}$ eines Strahlengewindes (§ 53) einem orthogonalen System angehören.

46. Die Achse eines Gewindes sei zugleich die Achse α) eines Rotationsparaboloides, β) eines Rotationskegels. Die Gewindekurven auf diesen Flächen sind zu suchen.

47. Nach 52, c) und § 52 Schluß gibt es keine Flächen, deren Haupttangenten einem Gewinde angehören. Aber man kann doch nach § 49, c) die Differentialgleichung der entsprechenden Kongruenzen auch für das Gewinde aufstellen und findet nach (123) und § 53, b), wenn man $\mathfrak{k}w$ statt w als neue abhängige Veränderliche einführt:

$$w_u^2 + 4\,w_v + 4\,u^2 = 0\,.$$

Es ist nach Goursat, Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, § 40, (1) ein vollständiges Integral dieser Gleichung zu suchen und seine geometrische Bedeutung anzugeben.

48. Die Brennfläche einer Kongruenz, die in einem Komplex enthalten ist, berührt die Singularitätenfläche des Komplexes.

49. Es ist analytisch zu zeigen, daß die Regelfläche (195) in Strahlbüschel zerfällt.

50. Wieviel Wendeebenen von Komplexkegeln gehen durch eine Gerade?

51. Die am Schluß des § 57 angedeutete Rechnung ist durchzuführen α) für den Fall, daß man die Beziehung zwischen den Richtungen der Regelflächen mit gemeinsamer Zentralebene sucht, β) für den Fall der schneidenden Richtungen.

Anhang I.

Anleitung zur Lösung der Übungsaufgaben.

Abschnitt I.

1. Für den Schnitt der asymptotischen und der Hauptebene findet man

$$q_1 = \tau\,\omega^2 p_1' , \quad q_4 = \tau(p_2 p_3' - p_3 p_2')\,\Delta - p_1\,\omega^2 .$$

2. β) Man findet zunächst

$$x' p_1' + y' p_2' + z' p_3' = - D' + D_1$$

wobei

$$D_1 = \begin{vmatrix} p_1' & p_2' & p_3' \\ p_1'' & p_2'' & p_3'' \\ p_4' & p_5' & p_6' \end{vmatrix} .$$

Man berechne

$$D^2 = \sum_1^3 p_{i+3}^2 - \left(\sum_1^3 p_{i+3} p_i' \right)^2$$

und bestätige dann, daß

$$D D' = D D_1 .$$

3. Von der Ordnung $2n-1$; macht man nämlich die Schmiegungsebene zur XY-Ebene, die Tangente zur X-Achse, so beginnen die Entwicklungen für die Zeiger der Kurvenpunkte mit

$$x = t + \ldots , \quad y = c\,t^m + \ldots , \quad z = k\,t^{n+1} + \ldots$$

wobei $1 < m \leqq n$ und $m = 2$ der reguläre Fall ist. Man berechne die Zeiger der Tangente wie in § 4 und findet, daß $R(p^{(n)})$ die niedrigste der Funktionen $R(p^{(\lambda)})$ ist, die für $t = 0$

nicht verschwindet; in besonderen Fällen ist ein Verschwinden noch höherer Ordnung nicht ausgeschlossen.

4. Wenn sich auch die Krümmung durch Änderung der Geschwindigkeit nicht ändert, so werden doch deren einzelne Werte den Werten von t anders zugeordnet; man kann daher nicht erwarten, daß die Funktion $\varkappa_2$ ungeändert bleibt. Dagegen muß die Dimension des Ausdruckes im physikalischen Sinne stimmen: σ, ϑ haben die Dimension lt^{-1}; σ', ϑ' haben lt^{-2}; ω, η als Winkelgeschwindigkeiten t^{-1}, usw. In der Tat ist $\varkappa_2$ das reziproke einer Länge.

5. Wenn ein Quadrant eines größten Kreises einer Einheitskugel sich um einen seiner Punkte dreht, so beschreibt der eine Endpunkt A einen Kreis mit dem sphärischen Halbmesser α der andere B mit dem Halbmesser $\frac{\pi}{2} - \alpha$. Die Geschwindigkeit von B mißt zugleich die Drehungsgeschwindigkeit der Berührungsebene desjenigen Kegels, welchen die Bahn von A bestimmt. Auf der Einheitskugel ist also $\cot\alpha$ die geodätische Krümmung eines Kreises mit dem sphärischen Halbmesser α. Also ist bei den Regelflächen mit gerader Striktionslinie $\zeta = \alpha$, bei denen mit ebener nicht gerader geodätischer Striktionslinie $\alpha = \frac{\pi}{2} - \zeta$.

6. Man erhält in der Tat ein Parallelstrahlenbüschel und bestätigt dies unmittelbar, indem man aus (65) und (67) $\omega = \sigma\varkappa_2$ ableitet. Es verschwindet also ω zugleich mit $\varkappa_2$. Daraus folgt aber nur, daß die Flächen mit gerader Striktionslinie nicht in jeder Beziehung als Spezialfall der Flächen mit ebener geodätischer Striktionslinie betrachtet werden können, sondern vielmehr bei stetiger Deformation immer in Flächen übergehen, deren Striktionslinie eine gewundene Kurve (Raumkurve) wird. Ja die Torsion der letzteren kann sogar sofort überall endliche Werte annehmen. Denn man kann z. B. umgekehrt bei einer gewöhnlichen Schraubenlinie, die auf einem Zylinder vom Halbmesser a mit den Erzeugenden den Winkel w einschließt, a und w gleichzeitig so gegen Null abnehmen lassen, daß die Torsion konstant bleibt, wie aus ihrem Werte $\frac{\sin 2w}{2a}$ hervorgeht. Dabei nähert sich die Schraubenlinie unbegrenzt der gemeinsamen Achse aller Zylinder.

7. $\Xi = x + \dfrac{\omega\sigma - \eta\vartheta}{\omega\eta' - \omega'\eta}(\alpha\eta - \lambda\omega)$, usw.

8. Wenn eine Ebene E sich so bewegt, daß sie stets Schmiegungsebene einer Raumkurve C bleibt, während ein fester Punkt von E längs C hingleitet und eine feste Gerade von E stets Tangente von C bleibt, so sagen wir, E gleite an C. Da nun die Nebenachse parallel zur Erzeugenden ist, so reduziert sich die Klassenkurve C_e (vgl. Schluß des § 11) hier auf ein Parallelstrahlenbüschel und die fragliche Bewegung unterscheidet sich daher von der Gleitung längs der Nebenpolarlinie nur dadurch, daß noch in jedem Augenblick eine Schiebungsgeschwindigkeit in der Richtung der Hauptnormale hinzutritt, deren Größe man findet, indem man berechnet, mit welcher Geschwindigkeit sich der Abstand der erwähnten beiden Parallelen ändert.

9. Die Nebenachse ist die Charakteristik der asymptotischen Ebene E für eine Schraubung von der Steigung

$$\mathfrak{k} = a\,\mathrm{tg}\,\psi\,.$$

Nullpunkt und Charakteristik von E haben die Abstände c und c' von der Schraubungsachse. Dann ist nach Bd. I, § 8 und 21:

$$c = -\,\mathfrak{k}\,\mathrm{tg}\,\varphi\,, \qquad c' = -\frac{\mathfrak{k}^2}{c} = \frac{\mathfrak{k}}{\mathrm{tg}\,\varphi} = a\,\mathrm{tg}\,\psi\,\mathrm{cot}\,\varphi\,.$$

Für die Hauptebene ist $c = \mathfrak{k}\,\mathrm{cot}\,\varphi$, usw.

13. An Stelle der Sinuslinie beim Zylindroid tritt hier, wie sich aus Gleichung (101) ergibt, die Linie

$$z = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,2\alpha\,,$$

die ebenso zur Konstruktion eines Fadenmodells benützt werden kann wie die Sinuslinie in Bd. I, § 75.

14. Man mache durch eine vierte Veränderliche t homogen, vertausche dann die Veränderlichen in passender Weise und setze wieder $t = 1$.

15. Denn legt man durch eine Erzeugende eine Ebene, so kann man deren Restschnitt finden.

Abschnitt II.

17. Es sei X die Brennlinie, s der Hauptstrahl eines parabolischen Netzes (Fig. 22), $E \equiv XZ$ die Ebene desjenigen

Büschels, dem der Hauptstrahl angehört (des „Hauptbüschels“) und (M', E') ein Nachbarbüschel des Hauptbüschels, t derjenige Strahl des letzteren, der auf der Brennlinie senkrecht steht, s' ein Nachbarstrahl, NN' der kürzeste Abstand zwischen s, s'. Endlich seien die Winkel bezeichnet

$$(s, t) = \nu_0 , \quad (s, s') = \nu .$$

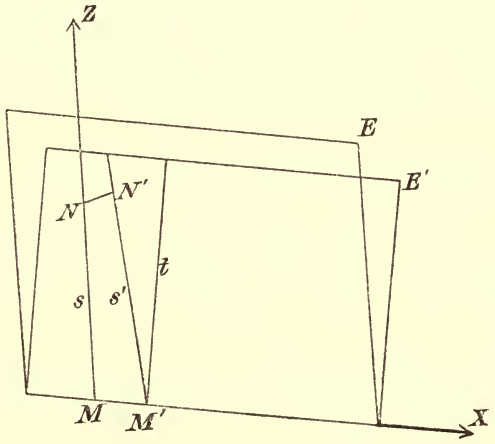

Fig. 22.

Dann gehört t einer solchen Regelfläche durch s an, die der Fortschreitungsrichtung $\alpha = 0$ entspricht; also ist für $\alpha = 0$ zu beweisen:

$$P_0 = \lim \frac{MM'}{\nu_0} = -\frac{1}{K} .$$

Dies geht aber aus Bd. I, § 53 b) fast unmittelbar hervor. Um die zweite Gleichung (42) auch für einen beliebigen Wert α zu beweisen, beachten wir, daß

$$P = \lim \frac{NN'}{\nu} , \quad NN' = MM' \cos\alpha , \quad \nu = \frac{\nu_0}{\cos\alpha} .$$

Die letzte Gleichung folgt aus einem kleinen sphärischen Dreieck, das durch die drei Richtungen s, s', t bestimmt ist. Denken wir uns ferner die Strahlen s, s' auf eine Ebene projiziert, die zu beiden parallel ist, so ist z die Höhe des

scheinbaren Schnittpunktes über der XY-Ebene, also:

$$z = -\lim \frac{MM' \sin\alpha}{\operatorname{tg} \nu} = -P_0 \sin\alpha \cos\alpha ,$$

woraus auch die erste Gleichung (42) folgt.

18. Die Umgebung eines parabolischen Strahls ist durch eine einzige Konstante K bestimmt, diese wieder durch das P_0 der vorigen Aufgabe. Der einfacheren Redeweise halber beweisen wir den Satz für das Hauptbüschel: Sei s der Hauptstrahl, g ein anderer Strahl desselben, der mit der Brennlinie den Winkel β bildet (Fig. 23). E, E', M, M', t

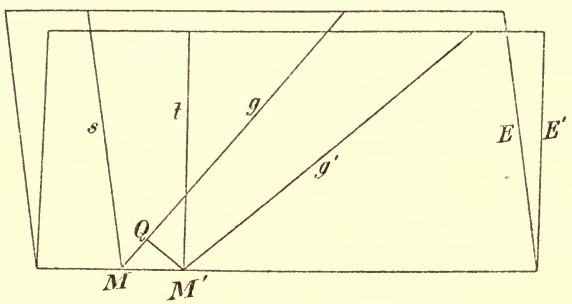

Fig. 23.

haben dieselbe Bedeutung, wie in der vorigen Aufgabe; wir ziehen $M'Q \perp g$ und verschieben eine durch g gelegte, auf E senkrechte Ebene parallel zu sich selbst, bis sie durch M' geht. Ihr Schnitt mit E' heiße dann g', so daß QM' der kürzeste Abstand zwischen g, g' ist. Die Umgebung von s wird dann durch $\lim \frac{MM'}{\nu_0} = P_0$, die von g durch $\lim \frac{QM'}{\nu'}$ bestimmt, wobei $\nu' = \sphericalangle(g, g')$ ist. Nun ist sowohl $QM' = MM' \sin\beta$ als auch $\nu' = \nu_0 \sin\beta$; also sind beide Grenzwerte gleich.

Für ein anderes als das Hauptbüschel ist der Beweis ganz derselbe. Man kann K' auch aus der Gleichung (67) in Bd. I, § 53 berechnen und findet den Wert (74) in § 24 bestätigt.

19. C ist der halbe Abstand der in Bd. I, § 55 a) mit S, S' bezeichneten Punkte und kann als solcher unmittelbar aus den Zeigern dieser Punkte übereinstimmend mit (70) in

§ 24 berechnet werden. Stellt man ferner die Gleichungen der Ebenen $SS'N$ und $SS'N'$ auf und berechnet daraus ihren Winkel 2Φ, so findet man

$$\text{(I)} \qquad \operatorname{tg} 2\Phi = \frac{c\,C \sin 2\varphi}{c^2 \cos 2\varphi + \dfrac{\delta\delta'}{4} \sin^2 2\varphi} .$$

Führt man andrerseits in τ durch (68 a) (§ 24) die Parameter δ, δ' ein, so findet man

$$-\tau = 2c^2 \cot 2\varphi + \frac{\delta\delta'}{2} \sin 2\varphi ,$$

so daß die Ausdrücke (I) und (70 a) in § 24 genau übereinstimmen. Endlich folgt der Satz 47 auch daraus, daß die Ebenen zweier Büschel projektiv bezogen sind, wenn man je zwei zueinander senkrechte Ebenen derselben zuordnet.

20. Nach Durchführung der beiden Zeigertransformationen lauten die Gleichungen der beiden Gewinde:

$$p_4 + c p_1 = 0 , \quad (c^2 + x^2) p_2 + c p_5 + x p_6 = 0 .$$

Durch Einführung natürlicher Zeiger (§ 18) erhält man für die Fortschreitungsrichtungen die Bedingungen:

$$P_1 = -(c + z \cot\alpha) , \quad P_2 = z \operatorname{tg} \alpha - \frac{c^2 + x^2}{c} .$$

Für die gemeinsamen Richtungen beider Gewinde ($P_1 = P_2$) gilt also:

$$z = \frac{x^2}{2c} \sin 2\alpha , \quad \text{usw.}$$

21. Z. B. kann man für das hyperbolische Netz aus (90) die Gleichungen

$$X = v \cot\varphi + \frac{Z}{c} u , \quad Y = u \operatorname{tg} \varphi + \frac{Z}{c} v$$

ableiten, daraus u, v berechnen:

$$u = \frac{c}{Z^2 - c^2} (XZ - c\,Y \cot\varphi) , \quad v = \frac{c}{Z^2 - c^2} (YZ - c\,X \operatorname{tg}\varphi)$$

und in die letzte Gleichung (90) einführen, wodurch eine Gleichung zehnten Grades in X, Y, Z allein entsteht; nur

für den Fall des rechtwinkligen Netzes vereinfacht sich:

$$\tau = \frac{c^2(X^2 - Y^2)}{Z^2 - c^2}$$

und die Gleichung wird vom sechsten Grade:

$$Z^2(Z^2 - c^2)^2 = c^4\left[\tfrac{1}{4}(X^2 - Y^2)^2 + (Z^2 - c^2)^2 + (X^2 + Y^2)(Z^2 + c^2) - 2cXYZ\right].$$

22. In der Darstellung § 24, c) ist die parabolische Kongruenz schon auf ihre Krümmungsflächen bezogen. Die eine Schar sind also ihre Strahlbüschel, die andere Schar $u = \text{const.}$ bedeutet alle Flächen, deren Strahlen mit der Brennlinie einen konstanten Winkel bilden. Die Hauptflächen sind bestimmt durch

$$u = \tfrac{1}{2}\left[e^{v-x} - e^{-(v-x)}\right].$$

23. Der Gedankengang ist genau so, wie bei Ableitung der Differentialgleichung der Hauptflächen ($\alpha = 45$); nur muß man vorher A und B einzeln berechnen.

24. Die Zentralpunkte fallen für solche Flächen der Kongruenz zusammen, deren Winkel α komplementär sind. Bezeichnen wir ihre Verteilungsparameter mit P_1 und P_2, so haben wir aus (36) in § 22:

$$(\alpha) \qquad \begin{cases} P_1 = aA + bB \\ P_2 = bA + aA \end{cases} \qquad (a + b = 1),$$

also

$$(\beta) \qquad P_1 + P_2 = A + B.$$

25. Aus (46) in § 22 findet man, wenn jetzt die Größe P für die Parameterflächen mit P_1 und P_2 bezeichnet wird:

$$(\gamma) \qquad P_1 = \frac{R}{U}p^2, \qquad P_2 = \frac{T}{V}p^2.$$

Also bedeutet jene Bedingung, daß die Parameterflächen gleiche Verteilungsparameter haben; auf die gleiche Bedingung führt die Frage nach den symmetrischen Parameterflächen.

26. Verbindet man die Ergebnisse der beiden vorhergehenden Aufgaben mit der Gleichung (52) in § 22, so folgt

$$\frac{R}{U} + \frac{T}{V} = \frac{UT - 2WS + VR}{UV - W^2},$$

was entweder auf $W = 0$ oder auf die in der Fragestellung angegebene Bedingung führt. In der Tat gelten auch für quasiorthogonale Parameterflächen die Gleichungen (α).

27. $2cz = -xy \sin 2\varphi$ (Bezeichnungen und Zeigersystem wie in § 24, b).

28. Es tritt nur zu R das Glied $-\varkappa \sin^2 v$ hinzu, die übrigen Größen des Schemas (111) ändern sich nicht. Die Gleichung der schraubenartigen Meridianfläche in den natürlichen Zeigern a, ω lautet:

$$\frac{a}{\sin\omega} + \varkappa \log \mathrm{nat}\left(\mathrm{tg}\,\frac{\omega}{2}\right) = \text{const.}$$

29. Setzt man

$$Q = UT - 2WS + VR, \quad M = UV - W^2, \quad N = RT - S^2,$$

so lautet die gesuchte Gleichung:

$$Q^2 - 4MN = \left(Q + \varkappa \frac{MN}{Q}\right)^2 \qquad (\varkappa \text{ const.}).$$

30. Die fraglichen Flächen werden schon durch die Gleichungen (64) und (70) in § 24 bestimmt, wenn man darin C, M, Φ als konstant betrachtet. Sie schneiden die Mittelebene in Kegelschnitten, haben außerdem die Brennlinien zu Leitlinien, sind also (§ 15) von der vierten Ordnung. Man beachte, daß die zweite Gleichung (64) durch eine äquivalente ersetzt werden kann:

$$\left(\frac{2M}{1 - M^2}\right)^2 = \frac{4c^2(u^2 + v^2 + c^2)}{\sigma^2 - 4c^2(u^2 + v^2 + c^2)}.$$

31. Denn die gemeinsame unendlich ferne Gerade der Normalschnittebenen ist eine Doppellinie der Regelfläche vierter Ordnung, weil sie die unendlich fernen Punkte der Brennlinien verbindet und in der Ebene des unendlich fernen (reellen) Leitkreises liegt. Wenn es sich um einen Normalstrahl handelt, sind die Achsenrichtungen der Ellipsen unveränderlich und liegen in den Brennebenen; hierüber vgl. Hensel (J. f. Math. Bd. 102, Th. d. unendlich dünnen Strahlenbündel, § 6) und Sturm (Liniengeom. Bd. I, Art. 115).

33. Setzt man die Glieder niedrigster Dimension in (92) Null, so erhält man:

$$(y^2 - z^2)^2 = 0.$$

Der Ursprung ist also ein doppelt zu zählender biplanarer Knotenpunkt.

34. Aus Satz 55 folgt, daß die Schmiegungsebene der erwähnten Gratlinie bei Normalenkongruenzen auf der Brennfläche senkrecht steht.

35. Stellt man das Büschel, dessen Scheitel der Ursprung und dessen Ebene die YZ-Ebene ist, analytisch dar, indem man den Winkel u eines Strahles mit der Y-Achse als Parameter einführt, verschiebt man es dann längs der X-Achse um r und dreht es endlich um die Z-Achse um den Winkel v, so erhält man nach Bd. I, § 41:

$$p_1 = -\cos u \sin v \qquad p_4 = r \sin u \sin v$$
$$p_2 = \cos u \cos v \qquad p_5 = -r \sin u \cos v$$
$$p_3 = \sin u \qquad p_6 = r \cos u \,.$$

Hier sind die Größen des § 22:

$$R = S = W = 0\,, \quad T = -\cos u \sin u$$
$$U = 1\,, \quad V = \cos^2 u\,.$$

Also ist $RT - S^2 = 0$; daß die Richtungen, die von einem beliebigen Strahl dieser Kongruenz ausgehen, wirklich dieselben sind, wie bei einem parabolischen Strahl, ergibt sich aus der allgemeineren Betrachtung der nächsten Aufgabe.

36. Aus der Theorie der parabolischen Netze [§ 24, c); Aufg. 17 und 18] geht hervor, daß die Richtungen, die von einem parabolischen Strahl s ausgehen, durch ein Strahlbüschel (P, E) repräsentiert werden können, gegen das der Strahl s folgende relative Lage hat (es ist anschaulicher von der Bewegung des Strahles gegen das Büschel als umgekehrt zu reden, obgleich begrifflich das letztere in Betracht kommt): s muß durch eine solche stetige Bewegung aus einem Strahle des Büschels (P, E) hervorgehen, daß der Schnittpunkt (s, E) eine Kurve durch P beschreibt. Man braucht, um dies einzusehen, nur daran zu denken, wie ein Büschel eines parabolischen Netzes gegen einen Strahl eines Nachbarbüschel liegt. Bei der in der Aufgabe angegebenen Bewegung wird nun diese Bedingung erfüllt. Denn es sei (Fig. 24) (P, E) eine feste Lage des Büschels, (P_1, E_1) eine bewegliche Nachbarlage, t_1 die Tangente der Kurve in P_1, Q ihr Schnitt mit der Schnittlinie a_1 von E und E_1, s ein allgemeiner

Strahl des Büschels (P_1, E_1), S sein Schnitt mit a_1. Man kann sich E_1 so bewegt denken, daß dabei t_1 auf der Kurve rollt. Dann bleibt der Winkel $S P_1 Q$ fest und weil $\lim Q P_1$ Null ist, so ist auch $\lim QS$ Null. Weil ferner Q, wenn das bewegliche Büschel in das feste einrückt, mit P zusammenfällt, so gilt dasselbe von S. Die vorher aufgestellte Bedingung ist also erfüllt. Wenn s mit der Grenzlage a von a_1, d. h. mit der Momentanachse für die Bewegung der

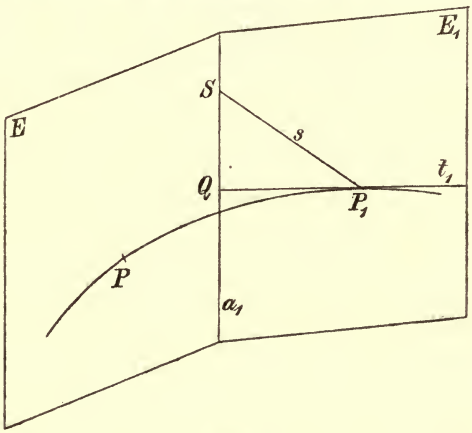

Fig. 24.

Ebene identisch wird, versagt dieser Beweis. In der Tat ist a ein singulärer Strahl des Büschels (P, E), ebenso die Tangente t in P. Im Beispiel der vorigen Aufgabe wird für diese beiden Strahlen auch $T = 0$, also wird nach § 22 der Verteilungsparameter für alle Richtungen Null.

Abschnitt III.

39. Man setze in die Gleichung des Gewindes:

$$a_4 q_1 + a_5 q_2 + a_1 q_4 + a_2 q_5 + a_3 q_6 = 0$$

die Werte (10) aus § 18 und erhält durch Grenzübergang:

$$a_4 \operatorname{tg}\alpha - a_5 + z(a_1 + a_2 \operatorname{tg}\alpha) = P(a_2 - a_1 \operatorname{tg}\alpha) .$$

Diese Gleichung läßt sich, wie es sein muß, auf die Form

$$P = (z - z_0) \cdot \operatorname{tg}(\alpha - \alpha_0) - m$$

bringen, wenn man

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = -\frac{a_1}{a_2}, \qquad z_0 = \frac{a_1 a_5 - a_2 a_4}{a_1^2 + a_2^2}, \qquad m = \frac{a_1 a_4 + a_2 a_5}{a_1^2 + a_2^2}$$

setzt.

41. Sie läßt sich analog wie $|M_{ik}|$ [Gleichung (103)] als Quadrat einer verschwindenden Determinante darstellen.

42. Er folgt auch aus Satz 40 und § 41.

43. Die Richtungsmannigfaltigkeiten mit gemeinsamem Zentralpunkt werden ebenfalls durch ein Kegelschnittsbüschel $\mathfrak{B}'$ abgebildet, weil man analog wie in § 25 einen rechtwinkligen Zeiger des Zentralpunktes als Quotient zweier quadratischen Formen in $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}$ erhalten kann. Ferner ist α zugleich mit den Zeigern U, V, W der asymptotischen Ebene einer Regelfläche konstant. Also folgt aus § 2, daß die Kurven $\alpha = \text{const.}$ ein Strahlbüschel bilden. Da t und g (Bezeichnungen der Fig. 18) in demselben vorkommen, ist T sein Scheitel. In der Tat sind durch $\alpha = \text{const.}$ Richtungsbüschel bestimmt, die in den Kongruenzen bei den hyperbolischen Strahlen mit einer unendlich fernen Brennlinie (§ 34) auftreten. Läßt man i in Fig. 18 ins Unendliche fallen und nimmt $\mathfrak{Z}$ als Kreis an, so wird das Büschel $\mathfrak{B}$ ein Kreisbüschel, $\mathfrak{B}'$ sein Orthogonalbüschel.

44. Verschiebt man einen Gewindestrahl s parallel zur Gewindeachse, so verschiebt sich auch die Nullebene seines Zentralpunktes parallel zu sich selbst und man kann s gleichzeitig in dieser Ebene mit beliebiger Geschwindigkeit drehen. Da also P alle Werte annehmen kann, erkennen wir in diesen ∞^1 Richtungen das Gegenbüschel wieder. Die Parallelebene zur Gewindeachse ist also die YZ-Ebene der Fig. 15 und in der hierzu senkrechten Ebene muß der kürzeste Abstand der isotropen Zentralrichtung liegen. Diese Richtung haben also die u-Flächen des § 53. Auch findet man unmittelbar das Komplementärbüschel, indem man E parallel zu sich selbst verschiebt und dann alle Gewindestrahlen in E als Nachbarstrahlen von s betrachtet.

45. Indem man $\frac{\mathfrak{f}}{2} w = w_1$ einführt und dann wieder w schreibt, kann man statt (162) die etwas einfachere Gleichung

$$(\alpha) \qquad -\mathfrak{u}^2 + u^2 \mathfrak{v}^2 + 2\mathfrak{v}\mathfrak{w} = 0$$

der Rechnung zugrunde legen. Als orthogonale Trajektorien von $w = \text{const.}$ findet man nach § 50, a):

$$u = \text{const.}, \qquad v + \frac{w}{u^2} = \text{const.}$$

Führt man $u = u_1$, $v = v_1 - \dfrac{w_1}{u_1^2}$, $w = w_1$ in (α) ein und wendet dann das Kriterium des § 50, b) an, so findet man, daß die gegebenen Kongruenzen keinem Orthogonalsystem angehören.

46. Die Projektionen der Kurven auf die Normalebenen der Achse sind α) logarithmische Spiralen, β) hyperbolische Spiralen mit der Gleichung $uv = \text{const.}$

47. Die Integrale können nur solche Kongruenzen darstellen, wie sie in Satz 110 erwähnt sind.

48. Die Kongruenz enthält ∞^1 singuläre Strahlen des Komplexes. Die zugeordneten singulären Punkte sind nach Satz 79 die Berührungspunkte (Koenigs).

49. Genügt ein Strahl y den Gleichungen (195), so genügt auch $y + \mu x$.

50. Soll durch die Gerade y eine Ebene gehen, die in einem Komplexstrahl x als Wendestrahl den Komplexkegel eines Punktes von x berührt, so müssen die Gleichungen erfüllt sein (Voß):

$$\Sigma x_i y_i = 0, \quad \Sigma F_i y_i = 0, \quad \Sigma F_{ik} y_i y_k = 0, \quad F = 0, \quad \Sigma x_i^2 = 0,$$

die $2n(n-1)(n-2)$ Wertesysteme x geben.

51, α) $F_{22} - 2F_{24}z + F_{44}z^2 - 2(F_{25} - F_{45}z)P + F_{55}P^2 = 0$.

β) Setzt man in (207) $P = 0$, so kann man der Homogeneität wegen in (206) einsetzen:

$$q_1 = 1, \quad q_2 = -\cot\alpha, \quad q_4 = z\cot\alpha, \quad q_5 = z$$

und erhält eine Gleichung, die auch aus (204) durch $u = -\cot\alpha$ hervorgeht.

Anhang II.

Zusammenstellung der wichtigsten Formeln zur Differentialgeometrie der Strahlenkongruenzen.

(Die Gleichungsnummern sind dieselben wie im II. Abschnitt.)

Darstellung einer Kongruenz (in rechtwinkligen, homogenen Linienzeigern):

$$(45)\qquad \begin{cases} p_\nu = p_\nu(u, v) & (\nu = 1, \dots 6), \\ \sum_1^3 p_\nu p_{\nu+3} = 0, & \sum_1^3 p_\nu^2 = p^2. \end{cases}$$

Die Fundamentalgrößen (48) und (47):

$$U = \sum (p_2 p_{3u} - p_3 p_{2u})^2, \qquad R = \sum_1^3 p_{\nu u} p_{\nu+3,u},$$

$$W = \sum (p_2 p_{3u} - p_3 p_{2u})(p_2 p_{3v} - p_3 p_{2v}), \qquad S = \tfrac{1}{2} \sum_1^6 p_{\nu u} p_{\nu+3,v},$$

$$V = \sum (p_2 p_{3v} - p_3 p_{2v})^2, \qquad T = \sum_1^3 p_{\nu v} p_{\nu+3,v}.$$

Der Verteilungsparameter:

$$(46)\qquad P = \frac{R + 2S\lambda + T\lambda^2}{U + 2W\lambda + V\lambda^2} p^2, \qquad \lambda = \frac{dv}{du};$$

für zylindrische Strahlen:

$$(46a)\qquad P = \left(\frac{R}{U} + 2\frac{S}{U}\lambda\right) p^2.$$

Seine extremen Werte A, B:

$$(52)\quad AB = \frac{RT - S^2}{UV - W^2} p^4, \quad A + B = \frac{UT - 2WS + VR}{UV - W^2} p^2.$$

Die Umgebung eines Kongruenzstrahles in natürlichen Richtungszeigern z, P, α:

(36) $z = \frac{1}{2}(A - B)\sin 2\alpha\,, \quad P = A\sin^2\alpha + B\cos^2\alpha\,.$

Bedingung für einen isotropen Strahl:

(53) $$R : S : T = U : W : V\,,$$

für einen Normalstrahl:

(53a) $$UT - 2WS + VR = 0\,.$$

Die Bestimmung des berührenden Hauptnetzes für einen hyperbolischen Strahl:

(54) $$c = \left|\sqrt{-AB}\right|\,, \qquad \operatorname{tg}\varphi = \left|\sqrt{-\frac{A}{B}}\right|\,;$$

für einen elliptischen Strahl:

(55) $$c = \sqrt{AB}\,, \qquad m = \sqrt{\frac{A}{B}}\,.$$

Die Grenzstrecke:

(79a) $$\left\{\begin{array}{c} 2h = |A - B| \\ = \dfrac{p^2}{UV - W^2}\sqrt{(UT - 2WS + VR)^2 - 4(RT - S^2)(UV - W^2)}\,. \end{array}\right.$$

Die Grenzfläche, wenn ξ, η, ζ die Zeiger eines Punktes der Mittelfläche sind [Gleichungen (76) in § 25]:

(80) $$x = \xi \pm h\cdot\frac{p_1}{p}\,, \qquad y = \eta \pm h\frac{p_2}{p}\,, \qquad z = \zeta \pm h\frac{p_3}{p}\,.$$

Die Brennstrecke:

(93) $$2c = 2p^2\sqrt{\frac{S^2 - RT}{UV - W^2}}\,.$$

Differentialgleichung der abwickelbaren Flächen:

(96) $$Ru'^2 + 2Su'v' + Tv'^2 = 0\,,$$

der Krümmungsflächen:

(98) $$(US - WR)u'^2 + (UT - VR)u'v' + (WT - VS)v'^2 = 0\,,$$

der Hauptflächen:

(100) $$\frac{R + 2S\lambda + T\lambda^2}{U + 2W\lambda + V\lambda^2} = \frac{UT - 2WS + VR}{2(UV - W^2)}\,, \qquad \lambda = \frac{dv}{du}$$

Kennzeichen dafür, daß die Kongruenz α) auf ihre abwickelbaren Flächen bezogen ist:

$$R = T = 0 ,$$

oder β) auf ihre Krümmungsflächen:

(99) $$S = W = 0 ,$$

oder γ) auf ihre Hauptflächen:

(102) $$W = 0 , \quad R : T = U : V .$$

Differentialgleichung der Krümmungsflächen im ersten und dritten Falle:

$$U u'^2 - V v'^2 = 0 ;$$

der Hauptflächen im ersten Falle:

$$UW + 2UV\lambda + WV\lambda^2 = 0 ,$$

im zweiten Falle:

$$U u'^2 - V v'^2 = 0 .$$

Bedingung für quasiorthogonale Parameterflächen:

$$W = 0 ,$$

für symmetrische Parameterflächen:

$$R : T = U : V ,$$

für komplementäre Parameterflächen:

$$\frac{S}{W} = \frac{1}{2}\left(\frac{R}{U} + \frac{T}{V}\right) .$$

Das Dichtigkeitsmaß für einen Punkt im Abstande a vom Mittelpunkte des Strahles:

(133) $$\Delta = \frac{1}{a^2 + AB} .$$

Berichtigungen zum I. Bande:

Seite 37: Die Anm. ist dahin zu berichtigen, daß Giorgini in einer andern Abhandlung im XX. Bande der genannten Memorie (1828) das Nullsystem entdeckt hat.

Seite 53, Z. 2 v. u. lies § 71 statt § 70.

Seite 84, letzte Zeile lies $\pi_{12}\,\pi_{34}$ statt $\pi_{12}\,\pi_{13}$.

Seite 91 steht: „Wir legen durch eine Kante $P_1\,P_2$ eine Ebene $E \perp P_3\,P_4$". Dies ist bei einem allgemeinen Tetraeder nicht möglich; statt dessen soll es heißen: „Wir legen durch P_1 eine Ebene $E \perp P_3\,P_4$". Der folgende Beweis wird durch diese Änderung nicht gestört.

Seite 122, Z. 12 v. u. lies III statt II.

Seite 125, Z. 7 v. o. lies Scheffers statt Engel.

Seite 199, letzte Z. lies $-cy$ statt cy.

Seite 220, Z. 8. v. u. lies $=0$ statt $=v$.

Seite 283, Z. 2 der Anm. ist „und Cayleysche Linienfläche" zu streichen, „ist" statt „sind" zu lesen.

Seite 319 sind die rechten Seiten der letzten beiden Gleichungen zu lesen:

$$\sum_1^6 \frac{d\,\omega(x)}{d\,x_i}\,x_i', \qquad \sum_1^6 \frac{d\,\Omega(y)}{d\,y_i}\,y_i'.$$

In § 75—77 treten die Gleichungsnummern (19) bis (23) doppelt auf.

Berichtigungen zum II. Bande:

Seite 112, Mitte und Seite 119, Z. 9 v. o. lies „abwickelbare Flächen" statt „Brennflächen".

Seite 137, Aufg. 23 lies „bilden" statt „bildet".

Sachverzeichnis.

(Die Zahlen geben die Seite an.)

Abbildungen einer Regelfläche 21; eines Komplexes 180.
Abwickelbare Abbildung 21; — Flächen 10, vierter Ordnung 57.
Akzessorische Flächen 153.
Achse 30.
Achsenfläche 30.
Äquatorialfläche 166.
Algebraische Regelflächen 51.
Asymptotische Ebene 3, 160.
Ausgangsebene 67.

Berührende Strahlennetze 87; — Schraubenbüschel 90.
Berührung zweier Kongruenzen 87; zweier Komplexe 161; einer Regelfläche und eines Komplexes 48; zweier Liniengebilde überhaupt 215.
Berührungskomplex 158.
Breitenkurven 166.
Brennebenen 88; -flächen 102; -punkte 88.

Cayleysche Fläche 60.
Charakteristiken 207.

Dichtigkeitsmaß 121.
Doppelerzeugende 42; -kurve 54; -strahlen 229.

Eigenschaften n-ter Ordnung 130.
Elementarkegel 201.
Elliptische Strahlen 88.

Flächenelement 205.
Fortschreitungsrichtung 70.
Frenetsche Gleichungen 23.

Gegenbüschel 191, -richtung 191.
Geschlecht einer Regelfläche 51.
Grenzebene 78; -fläche 96; -punkt 78; -schraubung 2.
Grenzflächen der Strahlennetze 99, 239.

Halbsinguläre Strahlen 136.
Hamiltonsche Gleichung 80.
Hauptbüschel 237; -ebenen 4, 77; -flächen 108, 221; -komplex 221; -korrelation 149; -netz 88; -richtungen 221; -tangentenschar 50.
Homogene Darstellung 180.
Hyperbolische Strahlen 88.

Integralkurven 201.
Invarianten einer Regelfläche 21.
Involutorische Korrelationen 73.
Isotrope Strahlen 86, 93; — Kongruenzen 86, 113, 195; — Nebenrichtung 190; -s Richtungsbüschel 160; — Zentralrichtung 189.

Komplementäre Richtungen 80; — Parameterflächen 111; -s Richtungsbüschel 160.
Komplexflächen 165; -kurven 167.
Konische Abbildung 9.
Konoide Abbildung 21.
Korrelation 3; — einer Richtung 73.
Korrespondenz 229.

Krümmungsebenen 83; -flächen 108; -maß einer Regelfläche im Zentralpunkte 10.
Kuspidalebene 46, 82; -linie 46; -punkt 46.

Leitkurven 52.
Linienelement 200.
Linksgewundene Regelfläche 3; Kongruenz 88.
Loxodromen 214.

Meridianfläche 113.
Meridiankurven 165.
Mittelebene 78; -einhüllende 98; -fläche 96; -gewinde 162; -punkt eines Kongruenzstrahles 78.
Momentanachse 34.
Mongesche Gleichung 201.

Natürliche Gleichungen einer Regelfläche 21; -s Zeigersystem 67.
Nebenachse 30; -achsenfläche 30; -polarlinie 32; -richtung 190.
Normalenkongruenzen 86, 116, 196; — eines Strahlengewindes 211; -paraboloid 2.
Normalbüschel 191; -form 145, 162; -gleichung 162; -strahlen 86, 88; zylindrische — 135.

Ordnung der Eigenschaften 130.
Orthogonale Parameter 183; — Richtungen 176, 189; — Trajektorien 197.
Orthoid 20; -e Abbildung 21; — Erzeugende 42.
Oskulation 217.

Parabolische Strahlen 88; — Kongruenzen 108, 242, — eines Gewindes 215.
Parameter einer Schrotung 40.
Parameterdarstellung 75, 180; -flächen 103, 183; -richtung 183; -kongruenzen 183.
Pfaffsche Gleichungen 203.
Polarfläche 31; -komplex 224; -linie 31.

Quadratische Richtungsreihe 218.
Quasiorthogonal 80, 111.

Rang 52.
Rationale Regelflächen 51.
Rechtsgewunden, s. linksgewunden.
Rektifizierende Fläche 30; — Gerade 30.
Regelfläche konstanter Neigung 90; — konstanten Abstandes 90.
Regelschraubenfläche 37.
Reguläre Komplexstrahlen 141; — Kongruenzstrahlen 79, 136.
Richtebene 19, 43.
Richtung im Linienraum 70; schneidende — 71; zylindrische — 71.
Richtungsbündel 177; -büschel 177; -reihe 218.
Rotationsnetz 89, 100, 111.

Schmiegungshyperboloid 50; -regelschar 50; -strahlen 50; -tangenten 50.
Schneidende Richtungen 71.
Schraubenartige Abbildung 22.
Schraubenbüschel 90.
Schraubungskongruenz 116.
Schroten 35.
Singuläre Ebenen 150; — Erzeugende 41; — Komplexe 170; — Komplexstrahlen 141, 172; — Kongruenzstrahlen 133; — Punkte 151.
Singularitätenfläche 153; — -kongruenz 151, 181.
Sphärische Abbildung einer Kongruenz 74; — einer Regelfläche 9.
Stationäre Berührung 223.
Striktionsband 14; -fläche 126; -linie 14, — eines Paraboloides 20; -punkt 126; -strahl 1.
Symmetrische Richtungen 80; — Parameterflächen 111.

Torsalebene 42; -erzeugende 42; -linie 42.
Torsion der Komplexkurven 169; — der Gewindekurven 170.
Trieder 26.
Trugschlüsse 227.

Umdrehungskongruenzen 113.
Umgebung eines Strahles 70.
Umgebungsform 125; -größe 160, 193; Regelfläche konstanter — 126.
Undulationserzeugende 42.
Unikursal 51.

Verteilungsparameter 2.
Verzweigungspunkte 231.
Vorzeichen der Torsion 24.

Wälzen 33.
Wahrer Umriß 19.
Wendeerzeugende 42; -flächen 220, 223; -richtungen 220; -strahl 220.
Windschiefe Flächen 10.
Winkel im Linienraum 176.

Zeiger einer Richtung im Linienraum 70.
Zentralebene 3, 160; -normale 1; -punkt 1, 160; -richtung 191; -tangente 1; -tangentenfläche 14.
Zylindrische Abbildung 21; — Kongruenzen 79, 107; — Kongruenzstrahlen 86, 132; — Richtungen 71, 156.
Zylindrisch-parabolisch 135.
Zylindroid 34, 62; — eines Kongruenzstrahles 82, 88.

LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung in Leipzig.

Elementare Berechnung der Logarithmen,

eine Ergänzung der Arithmetik-Bücher

von

Dr. Hermann Schubert,

Professor an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg.

Preis: Broschiert M. 1.60.

Formeln und Lehrsätze der Allgemeinen Mechanik

in systematischer und geschichtlicher Entwicklung

von

Dr. Karl Heun,

Professor an der Technischen Hochschule in Karlsruhe.

Mit 25 Figuren im Text.

Preis: Gebunden M. 3.50.

Elemente der Geometrie der Lage.

Für den Schulunterricht bearbeitet

von

Dr. Rudolf Böger,

Professor am Realgymnasium des Johanneums in Hamburg.

Mit 33 Figuren.

Preis: Kartoniert 90 Pfg.

Die Lehre von der Zentralprojektion

im vierdimensionalen Raume

von

Dr. H. de Vries,

Dozent an der Polytechnischen Schule zu Delft.

Mit 25 Figuren.

Preis: Broschiert M. 3.—.

RETURN TO ➔ CIRCULATION DEPARTMENT
202 Main Library

LOAN PERIOD 1 HOME USE	2	3
4	5	6

ALL BOOKS MAY BE RECALLED AFTER 7 DAYS
Renewals and Recharges may be made 4 days prior to the due date.
Books may be Renewed by calling 642-3405.

DUE AS STAMPED BELOW

AUG 30 1987

USER DISC DEC 12 1991

6/19-01

UNIVERSITY OF CALIFORNIA, BERKELEY
BERKELEY, CA 94720

FORM NO. DD6,

naturlich angepaßt an den Lehrgang des Verfassers, aber doch, ihrem Inhalt nach, mehr für Realschüler als für Gymnasiasten geeignet.

U.C. BERKELEY LIBRARIES
C003292061

G. J. Göschen'sche Verl

Elemente der Stereometrie

von

Prof. Dr. Gustav Holzmüller.

Band I: **Die Lehrsätze und Konstruktionen.** Mit 282 Figuren. Preis brosch. M. 6.—, geb. 6.60.

„ II: **Die Berechnung einfach** eter Körper. Mit 156 Figuren. Preis bro 10.—, geb. M. 10.80.

„ III: **Die Untersuchung und** tion schwierigerer **Raumgebilde.** Mit Preis brosch. M. 9.—, geb. M. 9.80.

„ IV: **Fortsetzung der s** **Untersuchungen.** Mit 89 Figuren. P . 9.—, geb. M. 9.80.

Dieses Werk dürfte wohl ei astehen, denn in so umfassender und gründlicher Weis e noch nicht behandelt worden. Das Wort „element hmen, daß die höhere Analysis und im allgemein Raumgeometrie ausgeschlossen bleiben, währe Geometrie in den Kreis der Betrachtungen hine die Methoden der darstellenden Geometrie

Alle Figuren, a verwendet worden ist, sind streng konstruiert der darstellenden Geometrie. Trotz des diese neue Stereometrie weit über das ü ich nsätzen umfangreiches Übungsmaterial Berechnung gleichmäßig und wird an Vi es **Inhalts wohl von keinem der her** nt.

QA608
Z5
v.2
157566

sche Mußestunden.

Eine Sammlung

von

Geduldspielen, Kunststücken und Unterhaltungsaufgaben mathematischer Natur

von

Dr. Hermann Schubert,

Professor an der Gelehrtenschule des Johanneums zu Hamburg.

Große Ausgabe in 3 Bdn. gebunden à M. 4.—.

Kleine Ausgabe gebunden M. 5.—.

Wie schon der Titel sagt, handelt es sich hier um kein streng wissenschaftliches Werk, sondern um ein Buch, in dem der Verfasser allerhand Gedanken über Dinge niedergelegt hat, die mit der Mathematik in Berührung stehen und mit denen sich jeder Gebildete oft und gern in seinen Mußestunden beschäftigt. Es sind ungezwungene, kritisch-historische Betrachtungen und unterhaltende Plaudereien über alle möglichen Probleme und Kunststücke, die in einer auch dem Laien leicht faßlichen Form vorgeführt, erklärt und ergänzt werden.